ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2019. Т. 23. № 4. С. 112–116. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

УДК 51.74 DOI: 10.18698/2542-1468-2019-4-112-116

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА И *Z*-ЧИСЕЛ

О.М. Полещук, Н.Г. Поярков, С.В. Тумор

МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

tumor.sergey@mail.ru

Предлагается модель поддержки принятия решений на основе понятия *Z*-числа и байесовского подхода. Авторы рассматривают частный случай *Z*-чисел, второй компонентой которых является нечеткое расширение вероятностных распределений. Подобная модель позволяет учитывать два типа неопределенности — нечеткость и случайность, а также достоверность полученной информации, которую обеспечивает вторая компонента *Z*-чисел. При использовании в задачах принятия решений только Байесовского подхода возникает проблема в тех случаях, когда неизвестны точные значения априорных вероятностей. Чтобы ликвидировать этот пробел, в статье используются *Z*-числа, которые позволяют найти оценки неизвестных вероятностей с определенной степенью достоверности (надежности). Эти оценки являются нечеткими расширениями некоторых вероятностных распределений, оперирование с которыми происходит на основе принципа расширения профессора Лотфи Заде. В статье приводится пример работы описанной модели поддержки принятия решений в условиях неопределенности смешанного характера, который подтверждает ее эффективность.

Ключевые слова: метод Байеса, *Z*-число, вычисление со словами, принятие решений

Ссылка для цитирования: Полещук О.М., Поярков Н.Г., Тумор С.В. Принятие решений на основе байесовского подхода и *Z*-чисел // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2019. Т. 23. № 4. С. 112–116. DOI: 10.18698/2542-1468-2019-4-112-116

В течение более четырех десятилетий разрабатываются системы поддержки принятия решений в условиях неопределенности разных типов. Байесовские методы принятия решений используют теорию вероятностей для обработки неопределенности случайного характера и широко применяются в различных областях для анализа, прогноза и поддержки принятия решений. Вычисления со словами используют теорию нечетких множеств для обработки неопределенности нечеткого характера. В случае наличия неопределенности смешанного характера необходимо объединение возможностей обоих подходов, которое бы усилило аппарат каждой из теорий. Попыткой продвижения в этом направлении было определение профессором Лотфи Заде понятия *Z*-числа, которое позволило формализовать высказывания в рамках естественного языка и определить меру их достоверности. Данная работа посвящена дальнейшему развитию подхода, объединяющему метод Байеса и аппарат вычислений со словами.

Цель работы

В работе приводится пример объединения *Z*-числа и байесовской теории для обеспечения поддержки принятия решений, когда точные значения всех параметров и вероятностей недоступны. Подобный гибридный подход обеспечивает систему поддержки принятия решений в условиях неопределенности смешенного типа.

Чтобы определить достоверность или надежность нечеткой информации была введена концепция *Z*-числа [1]. *Z*-число описывает значение некоторой нечеткой переменной *X* и представляет собой упорядоченную пару двух нечетких чисел $Z = (A, B)$. Первое число (A) является ограничением на значения переменной X (это ограничение может быть представлено в короткой форме «X есть A»), а второе число B — является нечетким ограничением на степень уверенности в первом числе A, т. е. оценка надежности A. В большинстве случаев нечеткие числа A и B описываются фразами естественного языка, например Z = (меньше 60, абсолютно уверен), и формально представляются как трапецеидальные или треугольные функции принадлежности.

В «вычислениях со словами» (computing with words CW) [2] предложена методология представления человеческих знаний таким образом, чтобы машины могли делать собственные выводы на их основе. «Вычисления со словами» обусловлены способностью человека выполнять различные задачи и принимать решения без применения явных вычислений и измерений. Эта способность позволяет упростить процесс принятия решения человеком. Например, когда человек едет на автомобиле, ему не нужно измерять точное расстояние до препятствия, чтобы объехать его. Он просто проследит приблизительное расстояние и посмотрит, слишком ли он близок к препятствию или достаточно далек от него. Точно так же значительный объем человеческих знаний представлен словами и формами нечетких измерений и приближений. Некоторые проблемы изложены и решены с использованием этих неточных и приблизительных форм [3]. Слова естественного языка можно смоделировать путем применения теории нечетких множеств и методов приближенных рассуждений, которые составляют основу попыток «вычислений со словами». Концепция «вычислений со словами», представленная Лотфи Заде [4], расширила область применения нечеткой логики еще дальше, появилась возможность решать более сложные проблемы. Аппарат нечеткой логики интерпретирует слова естественного языка в виде некого нечеткого множества, каждое значение которого подчинено определенной функции принадлежности. Предположим, что переменная X = «расстояние», поэтому утверждение «X меньше 60 (м)» в рамках Z-числа оценивается как очень надежное (B = «абсолютно уверен»). Z-числа позволяют учитывать знания и достоверность (надежность) любого предложения, высказанного экспертом.

Преимущество Z-чисел заключается в их способности работать с нечеткими значениями случайных величин и их вероятностями. Традиционные методы, такие, как байесовская теория принятия решений [5] — одна из наиболее популярных методологий принятия решений, применимы только к точным значениям и вероятностям (точным параметрам функций плотности).

В работе рассмотрен пример использования Z-чисел для улучшения байесовской теории принятия решений с возможностью обработки неточных измерений, когда точные распределения вероятностей недоступны, а также иллюстрация гибридной методологии, объединяющей «вычисления со словами» и Z-числами с байесовской теорией принятия решений, которая сочетает в себе нечеткие и байесовские подходы для решения проблем поддержки / принятия решений, если точные вероятности событий и результатов недоступны.

Ранее были предприняты некоторые попытки принятия решений с использованием Z-оценок [6] и Z-информации [7], но эти подходы предполагают наличие данных о параметрах и/или типе функций распределения вероятности, которые должны быть известны.

Необходимые понятия и определения

Более двух десятилетий тому назад Заде ввел концепцию «вычислений со словами» (*CW*) [4], интерпретирующую предложения на естественном языке как отношение между лингвистической переменной (V) и лингвистическим термом (T). Таким образом, терм T накладывает ограничения на возможные значения V. Это отношение называется *обобщенным ограничением* (generalized constraint *GC*) и показывает возможность того, что V примет значение, принадлежащее терму T. Концепция *GC* является центральной в «вычислениях со словами», она позволяет формализовать фразы естественного языка и проводить над ними вычисления. Понятие Z-числа (числа Заде) — следующий этап развития нечеткой логики, оно позволяет учитывать надежность и достоверность обобщенного ограничения и интерпретировать его как ограничение на нечеткую вероятность [1].

Приведем необходимые понятия и определения.

Вероятность нечеткого события A в пространстве высказывания U с функцией принадлежности μ_A и плотностью распределения вероятностей p можно выразить интегралом

$$P(A)=\int_U \mu_A(u)p(u)du$$

или в случае дискретного распределения p

$$P(A)=\sum_U \mu_A(u)p(u).$$

Профессор Лотфи Заде определяет объединение нечетких событий как произведение их функций принадлежности. Следовательно, независимость нечетких событий можно определить подобно четким событиям. Использовав произведение нечетких событий (A_1A_2) в качестве их объединения, профессор Заде ввел понятие условной вероятности нечетких событий, аналогичное понятию условной вероятности:

$$P\left(A_1 \middle| A_2\right)=\frac{P\left(A_1A_2\right)}{P\left(A_2\right)}.$$

Основываясь на этом определении, правило Байеса для вероятности двух нечетких событий записываем в виде:

$$P\left(A_1 \middle| A_2\right)=\frac{P\left(A_2 \middle| A_1\right)P\left(A_1\right)}{P\left(A_2\right)},$$

где $\mu_{A_1A_2}=\mu_{A_1}\mu_{A_2}$.

Z-число является упорядоченной парой нечетких чисел $Z = (A, B)$ [1]. В этой паре A — ограничение на значения некоторой переменной X (X есть A), а B представляет собой оценку уверенности в том, что X есть A. Например: Z = (население России около 146 млн чел., уверен). Позднее было предложено понятие Z^+-числа. Оно представляет собой сочетание нечеткого числа A и случайного числа R и записывается в виде упорядоченной пары $Z^+ = (A, R)$. В этой паре A имеет то же значение, что и в Z-числе, а R является распределением вероятностей случайной величины X.

При непрерывном Z-числе, его можно выразить через интеграл

$$\int_U \mu_A(u)p_X(u)du \text{ есть } B,$$

где p_X — неизвестная функция плотности распределения вероятности X.

В байесовской теории принятия решений вероятность гипотезы и вероятность наблюдения используются для расчета вероятности исхода события. Пусть имеется n гипотез, когда искомое событие A при одной из гипотез B_i $1 < i < n$ наступает, то вычисляют апостериорные вероятности (полученные после опыта) $P(B_i \mid A)$, позволяющие сделать вывод о правильности априорных (доопытных) вероятностей и переоценить их. Помогает в этом формула Байеса

$$P\left(B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(B_i A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \middle| B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A \middle| B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}.$$

Если возможны m решений (decision) d_k, $1 < k < m$, когда событие A наступило и потеря (например, времени), связанная с каждым решением, есть функция $l(d_k \mid B_i)$, тогда общую ожидаемую потерю (ОП) можно вычислить из уравнения

$$\text{ОП}\left(d_k \middle| A\right) = \sum_i l\left(d_k \middle| B_i\right) P\left(B_i \middle| A\right).$$

Функция потерь — это функция, которая в теории статистических решений характеризует потери при неправильном принятии решений на основе наблюдаемых данных. Из-за случайности наблюдаемых данных принятое решение (оценка) γ может не совпадать с истинным значением оцениваемого параметра l. Очевидно, что ошибки зависят от выбранного правила принятия решений. Качество принимаемых решений характеризуется функцией потерь $C(\gamma, l)$, которую выбирают так, чтобы $C(\gamma, l) \geq 0$, где нулевым значениям соответствуют правильные решения.

Байесовское правило принятия решений говорит о том, что нужно минимизировать ожидаемую потерю и выбрать то решение из m, которое приводит к этому минимуму

$$d = \arg\min_{d_k} \text{ОП}\left(d_k \middle| A\right).$$

Для сравнения Z-чисел в работе используется понятие взвешенного среднего значения (ВС), которое определяется следующим образом

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}.$$

В случае $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ формула приобретет вид

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot x_i.$$

Принятие решений на основе байесовской теории и *Z*-чисел. Рассмотрим пример интеграции Z-чисел с классическим байесовским подходом [8]. Нечеткое высказывание обобщаем: «Гражданину требуется попасть из города А в город Б». У него есть несколько вариантов. В зависимости от погодных условий гражданин принимает один из них:

на собственном автомобиле:

если не идет дождь, поездка часто занимает около 3 ч;

если идет дождь, поездка займет, может быть, около 5 ч;

на поезде:

если нет дождя, поездка почти наверное займет около 3,5 ч;

если идет дождь, поездка часто занимает около 4 ч.

Согласно задаче, уже известны следующие вероятности:

P (идет дождь) = 0,7 — *вероятно*;

P (поездка на автомобиле) = 0,75 — *обычно*;

P (около 3 ч | нет дождя, автомобиль) — *часто*;

P (около 3,5 ч | нет дождя, поезд) — *почти наверное*;

P (около 5 ч | дождь, автомобиль) — *может быть*;

P (около 4 ч | дождь, поезд) — *часто.*

В данном примере необходимо рассчитать ожидаемую потерю времени пассажиром при поездке на автомобиле или на поезде. Для этого требуется вычислить 16 вероятностей и ОП для каждого вида транспорта:

P (около 4 ч, дождь, поезд) — ?

P (около 4 ч, дождь, автомобиль) — ?

...

P (дождь, поезд | около 4 ч) — ?

P (дождь, автомобиль | около 4 ч) — ?

...

ОП (автомобиль) — ?

ОП (поезд) — ?

В байесовской теории предполагается, что вероятности — это известные величины. Но при использовании Z-чисел необязательно заранее знать все вероятности. Можно аппроксимировать неизвестные вероятности, применяя аппарат нечетких множеств [9, 10].

Согласно байесовскому подходу, совместная вероятность в нашем примере вычисляется следующим образом:

$$P\text{ (около 4 ч, дождь, поезд)} = \\ = P\text{(около 4 ч | поезд, дождь)}P\text{(поезд)}P\text{(дождь)}. \quad (1)$$

Чтобы формализовать нечеткие числа, такие, как *часто*, *нечасто*, *может быть*, воспользуемся правилом, определяющим пересечение нечетких множеств [9]:

$$\mu_{(\text{около 4 ч, дождь, поезд})}\left(p_4\right) = \sup_{p_4} \min\left\{\mu_{(\text{часто})}\left(p_1\right), \mu_{(\text{не часто})}\left(p_2\right), \mu_{(\text{может быть})}\left(p_3\right)\right\} \quad (2)$$

при условии $p_4 = p_1 p_2 p_3$ и $0 \leq p_4 \leq 1$.

Чтобы рассчитать вероятность P(около 4 ч) воспользуемся формулой [8]:

$$P(E)=P(E,A,B)+P(E,\overline{A},B)+ \\ +P(E,A,\overline{B})+P(E,\overline{A},\overline{B}), \quad (3)$$

где $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — это дополнения событий соответственно A и B.

Таким образом,

P(около 4 ч) =
= P(около 4 ч, автомобиль, дождь) +
+ P(около 4 ч, поезд, дождь) + (4)
+ P(около 4 ч, автомобиль, нет дождя) +
+ P(около 4 ч, поезд, нет дождя).

Апостериорные вероятности рассчитываются на основе совместных вероятностей по известной формуле

$$P\left(B,C\middle|A\right)=\frac{P(A,B,C)}{P(A)}. \quad (5)$$

Можно вычислить знаменатель апостериорной вероятности, $P(A)$, используя формулы (2), (3) и нечеткую арифметику. Если $P(A, B, C) = P_1$ и $P(A) = P_2$, то $P (B, C \mid A) = P_3$. Далее воспользуемся правилом, определяющим пересечение нечетких множеств:

$$\mu_{P_3}\left(p_3\right)=\sup_{p_3}\min\left\{\mu_{P_1}\left(p_1\right),\mu_{P_2}\left(p_2\right)\right\} \quad (6)$$

при условии $p_3=\dfrac{p_1}{p_2}$ и $0 \le p_3 \le 1$.

Пример отыскания апостериорной вероятности в нашей задаче:

$$P\left(\text{поезд, дождь}\middle|\text{около 4 ч}\right)= \\ =\frac{P\left(\text{около 4 ч, поезд, дождь}\right)}{P\left(\text{около 4 ч}\right)}, \quad (7)$$

где P(около 4 ч, дождь, поезд) вычисляется согласно формулам (1), (2) и P(около 4 ч) вычисляется согласно формуле (4).

Чтобы вычислить ОП времени при поездке на поезде или автомобиле, соответствующую апостериорную вероятность следует умножить на функцию потери и просуммировать получившиеся произведения. Это нечеткая операция и выполняется согласно правилам, определяющим арифметические операции над нечеткими числами. Функция потерь в данном случае представляет собой время в пути. Таким образом,

$$\text{ОП}(N)=\sum_i l_{iN}P_i,$$

где l_{iN} — это ожидаемая потеря времени при i-м условии поездки; N — общее количество условий.

Для выбора наилучшего варианта необходимо сравнить полученные значения, например, используя ранжирование Z-чисел [7] или ВС.

Наконец, получаем: ВС(ОП(автомобиль)) = 0,69; ВС(ОП(поезд)) = 0,71.

Поскольку взвешенное среднее варианта поездки на поезде выше, то следует выбирать этот вариант. Полученный результат совпадает с полученным только с использованием метода Байеса [8].

Выводы

Показано преимущество подхода, объединяющего метод Байеса и аппарат «вычислений со словами», к решению задач принятия решений, заключающееся в возможности обработки информации в условиях неопределенности смешанного типа и отсутствии необходимости знания всех точных апостериорных вероятностей альтернатив. Рассмотренный подход находится в стадии развития, но тем не менее на практике подтвердил свою актуальность и эффективность, несмотря на наличие такого недостатка, как сложность вычислений при проведении операций с Z-числами [7], а также отсутствие единого метода ранжирования Z-чисел и альтернатив на их основе. Приведенный в работе практический пример поддержки принятия решений на основе Z-чисел и байесовской теории также подтвердил эффективность подобного гибридного подхода в условиях неопределенности смешанного типа.

Список литературы

[1] Zadeh L.A. A note on Z-numbers // Inf. Sci., 2011, v. 181, pp. 2923–2932.

[2] Zadeh L.A. Computing with words and perceptions – a paradigm shift // Proc. of the Int. Conf. on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications, PDPTA 2010, Las Vegas, Nevada, USA, July 12–15, 2010, 2 vols., 2010, pp. 3–5.

[3] Полещук О.М., Тумор С.В. Использование Z-чисел (чисел Заде) для поддержки принятия решений // Сб. докл. XV Ежегодной Междунар. науч.-техн. конф. «IT-технологии: развитие и приложения», Владикавказ, Северо-Кавказский горно-металлургический институт, 12–14 декабря 2018 г. Владикавказ, 2018. 340 с.

[4] Zadeh L. Fuzzy logic computing with words // IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1996, no. 4, pp. 103–111.

[5] Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен / пер. с англ. Г.Г. Вайештейна, А.М. Васьковского, под ред. В.Л. Стефанюка. М.: Мир, 1976. 509 с.

[6] Yager R.R. On Z-valuations using Zadeh's Z-numbers // Int. J. Intell. Syst., 2012, no. 27, pp. 259–278.

[7] Aliev R.A., Huseynov O.H., Aliyev R.R., Alizadeh A.A. The Arithmetic of Z-Numbers: Theory and Applications. NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc.,River Edge, 2015. 300 p.

[8] Marhamati N., Buxton E.K., Rahimi Sh. Integration of Z-numbers and Bayesian decision theory: A hybrid approach to decision making under uncertainty and imprecision // Applied Soft Computing, 2018, no. 72, pp. 273–290.

[9] Zadeh L.A. Toward a generalized theory of uncertainty (GTU): an outline // Inf.Sci. Inf. Comput. Sci., 2005, v. 172, pp. 1–40.

[10] Patel P., Khorasani E., Rahimi S. Modeling and implementation of Z-number // Soft Comput, 2015, v. 20 (4), pp. 1–24.

Сведения об авторах

Полещук Ольга Митрофановна — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики и физики МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), olga.m.pol@yandex.ru

Поярков Николай Геннадьевич — канд. техн. наук, доцент, декан Космического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), poyarkov@mgul.ac.ru

Тумор Сергей Владимирович — аспирант, ассистент кафедры высшей математики и физики МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), tumor.sergey@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2019.

Принята к публикации 15.07.2019.

DECISION-MAKING BASED ON BAYESIAN THEORY AND *Z*-NUMBERS

O.M. Poleschchuk, N.G. Poyarkov, S.V. Tumor

BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

tumor.sergey@mail.ru

A decision support model based on the concept of *Z*-number and the Bayesian approach is proposed. The authors consider a special case of *Z*-numbers, the second component of which is a fuzzy extension of probability distributions. Such a model allows to take into account two types of uncertainty fuzziness and randomness, as well as the reliability of the information received, which provides the second component of *Z*-numbers. When using only the Bayesian approach in decision-making problems, a problem arises in cases where the exact values of a priori probabilities are unknown. To fill this gap, the article uses *Z*-numbers, which allow to find estimates of unknown probabilities with a certain degree of reliability (reliability). These estimates are fuzzy extensions of some probability distributions, which are operated on the basis of the extension principle of Professor Lotfi Zadeh. The article gives an example of the described decision support model in a mixed environment of uncertainty, which confirms its effectiveness.
Keywords: Bayesian method, *Z*-number, calculation with words, decision making

Suggested citation: Poleschchuk O.M., Poyarkov N.G., Tumor S.V. *Prinyatie resheniy na osnove bayesovskogo podkhoda i Z-chisel* [Decision-making based on bayesian theory and *Z*-numbers]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2019, vol. 23, no. 4, pp. 112–116. DOI: 10.18698/2542-1468-2019-4-112-116

References

[1] Zadeh L.A. A note on *Z*-numbers // Inf. Sci., 2011, v. 181, pp. 2923–2932.
[2] Zadeh L.A. Computing with words and perceptions – a paradigm shift // Proc. of the Int. Conf. on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications, PDPTA 2010, Las Vegas, Nevada, USA, July 12–15, 2010, 2 vols., 2010, pp. 3–5.
[3] Poleshchuk O.M., Tumor S.V., *Ispol'zovanie Z-chisel (chisel Zade) dlya podderzhki prinyatiya resheniy* [Using *Z*-numbers (Zade numbers) for decision-making support] Sbornik dokladov XV Ezhegodnoy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «IT-tekhnologii: razvitie i prilozheniya» [Collection of reports of the XV Annual International Scientific and Technical Conference «IT-technologies: development and applications»], Vladikavkaz, North Caucasus Institute of Mining and Metallurgy, December 12–14, 2018. Vladikavkaz, 2018. 340 p.
[4] Zadeh L. Fuzzy logic computing with words. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1996, no. 4, pp. 103–111.
[5] Duda R., Hart P. *Raspoznavanie obrazov i analiz stsen* [Pattern Recognition and Scene Analysis]. Trans. from English G.G. Vayeshteina, A.M. Vaskovsky. Ed. V.L. Stefanuk. Moscow: Mir, 1976, 509 p.
[6] Yager R.R. On *Z*-valuations using Zadeh's *Z*-numbers. Int. J. Intell. Syst., 2012, no. 27, pp. 259–278.
[7] Aliev R.A., Huseynov O.H., Aliyev R.R., Alizadeh A.A. The Arithmetic of *Z*-Numbers: Theory and Applications. NJ, USA: World Scientific Publishing Co., Inc.,River Edge, 2015. 300 p.
[8] Marhamati N., Buxton E.K., Rahimi Sh. Integration of *Z*-numbers and Bayesian decision theory: A hybrid approach to decision making under uncertainty and imprecision. Applied Soft Computing, 2018, no. 72, pp. 273–290.
[9] Zadeh L.A. Toward a generalized theory of uncertainty (GTU): an outline. Inf.Sci. Inf. Comput. Sci., 2005, v. 172, pp. 1–40.
[10] Patel P., Khorasani E., Rahimi S. Modeling and implementation of *Z*-number. Soft Comput, 2015, v. 20 (4), pp. 1–24.

Authors' information

Poleshchuk Ol'ga Mitrofanovna — D-r Sci. (Tech.), Professor, Head of Higher Mathematics and Physics Department of BMSTU (Mytishchi branch), olga.m.pol@yandex.ru

Poyarkov Nikolay Gennad'evich — Cand. Sci. (Tech.), Head of Space Department of BMSTU (Mytishchi branch), poyarkov@mgul.ac.ru

Tumor Sergey Vladimirovich — pg., assistant at the Department of Higher Mathematics and Physics, BMSTU (Mytishchi branch), tumor.sergey@mail.ru

Received 19.04.2019.

Accepted for publication 15.07.2019.