ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2019. Т. 23. № 3. С. 107–113. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

УДК 512.643.8 DOI: 10.18698/2542-1468-2019-3-107-113

МАТРИЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ЗАДАЮЩИЕ КОСОЙ ПРОЕКТОР

А.М. Ветошкин[1], А.А. Шум[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1
[2]Тверской государственный технический университет, 170026, г. Тверь, наб. Афа-насия Никитина, д. 22

vetkin@mgul.ac.ru

Часто находит применение хорошо известная формула для ортопроектора: $\hat{A} = A(A^*A)^{-1}A^*$, где A — столбцовая матрица полного ранга; столбцы матрицы A задают подпространство, на которое выполняется ортогональное проектирование. В данной статье предлагается выражение для косого проектора через две матрицы полного ранга A и B, столбцы которых задают образ и ядро этого проектора: $P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}$, $\tilde{B} = I - \hat{B}$. От других аналогичных выражений [6, 17] данная формула отличается симметрией: матрица $A^*\tilde{B}A$ — эрмитова. При выводе этого результата, а также многих других, оказалась очень полезна простая лемма: если A — столбцовая матрица полного ранга, то $\tilde{B}A$ остается матрицей полного ранга тогда и только тогда, когда $\{A\}\cap\{B\} = 0$. Известно, что псевдообратная матрица от произведения любых двух эрмитовых проекторов есть некоторый проектор. В данной работе определены образ и ядро этого проектора для произвольных эрмитовых проекторов. Получен важный критерий того, что два подпространства, задаваемые столбцами матриц A и B, пересекаются по нулевому вектору: $B(\tilde{A}B)^+B = B$.

Ключевые слова: проектор, ортопроектор, косой проектор, псевдообратная матрица, формула Клайна

Ссылка для цитирования: Ветошкин А.М., Шум А.А. Матричные выражения, задающие косой проектор // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2019. Т. 23. № 3. С. 107–113. DOI: 10.18698/2542-1468-2019-3-107-113

Пусть P — квадратная матрица с комплексными элементами. Она называется *проектором*, если $P = P^2$. Если P — эрмитова матрица, то P называют *ортопроектором*, или *косым проектором*.

Пусть подпространства L и M пересекаются по нулевому вектору и $L + M = \mathbb{C}^n$. Говорят, что L и M *дополнительные подпространства*. Обозначим матрицу, проектирующую на подпространство L вдоль подпространства M, как $P(L, M)$. Для подпространства, натянутого на столбцы матрицы A (образа A), будем использовать обозначение $\{A\}$. Если подпространства, определяющие проектор, задаются матрицами $L = \{A\}$ и $M = \{B\}$, то вместо $P(L, M)$, или $P(\{A\}, \{B\})$, пишем просто $P(A, B)$.

Через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Если подпространство M есть ортогональная сумма двух подпространств $M = X \oplus Y$, то для задания подпространства Y через подпространства M и X введем обозначение $Y = X_M^\perp$. Подпространство Y можно задать так:

$$Y = X^\perp \cap M = (M^\perp + X)^\perp.$$

Ортопроектор однозначно определяется одним подпространством $L = \{A\}$, поэтому $P(L) = P\left(\{A\}, \{A\}^\perp\right)$. Для ортопроектора $P(A)$, задаваемого матрицей A, будем использовать более лаконичное обозначение $\hat{A}$.

Цель работы

В статье предлагается выражение для косого проектора через две матрицы полного ранга A и B, столбцы которых задают образ и ядро этого проектора: $P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}$, $\tilde{B} = I - \hat{B}$. В работе определены образ и ядро в известной формуле для псевдообратной матрицы от произведения любых двух эрмитовых проекторов.

Постановка задачи

Известна формула для ортопроектора $P(A)$:

$$\hat{A} = A(A^*A)^{-1}A^*, \tag{1}$$

где A — столбцовая матрица полного ранга [1, 2]; A^* — сопряженная по отношению к A матрица.

Для *дополнительного* проектора $I_n - \hat{A}$ введем следующее обозначение:

$$\tilde{A} = I_n - \hat{A},$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Одним из результатов данной работы является выражение для проектора через две столбцовые матрицы полного ранга — аналог для косого проектора (1):

$$P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}. \tag{2}$$

Известно несколько формул для определения косого проектора. В обозначениях данной работы формула Африата [1] записывается таким образом:

$$P(A, B) = (I - \hat{A}\hat{B})^{-1}\hat{A}(I - \hat{A}\hat{B}). \tag{3}$$

В работе Гревилла [3] получены следующие выражения:

$$P(A, B) = (\tilde{B}\hat{A})^+; \tag{4}$$

$$P(A, B) = (I - \hat{B}\hat{A})^{-1}\tilde{B}; \tag{5}$$

$$P(A, B) = \hat{A}(\hat{A} + \hat{B} - \hat{B}\hat{A})^{-1}. \tag{6}$$

В формуле (4) используется *псевдообратная* матрица: M^+ обозначает псевдообратную матрицу к матрице M [2].

Во многих работах [4–6] можно найти такое выражение для косого проектора:

$$P(A, B) = [A{:}0][A{:}B]^{-1}. \quad (7)$$

Здесь запись $[A{:}B]$ используется для обозначения *блочной* матрицы, полученной последовательным выписыванием столбцов матрицы A, затем B.

В отличие от (2) в формуле (4) матрицы не обязательно столбцовые полного ранга, требуется только дополнительность подпространств $\{A\}$ и $\{B\}$. Таким образом, (2) есть частный случай (4).

В разделе, посвященном выводу формулы для косого проектора, дается простая, но важная лемма о том, что после ортогонального проектирования линейно независимые векторы остаются линейно независимыми. Применение этой леммы приводит к **теореме 1**, в которой получена формула (2), а также (4) — $P(A, B) = A(\tilde{B}A)^+$. В последней формуле требуется, чтобы подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ были дополнительными.

В **теоремах 2** и **3** получено несколько интересных и важных формул для матричных выражений, образуемых из матриц A и B, причем только требуется, чтобы $\{A\}\cap\{B\} = 0$. Показано, что при этом остается проектором выражение

$$A(\tilde{B}A)^+ = (\tilde{B}\hat{A})^+ = P(\{A\}, \{B\} + (\{A\} + \{B\})^\perp).$$

Из **теоремы 3** получено важное ***следствие 1*** — формула (36), которая позволяет довольно просто вычислить $[A{:}B]^+$, когда $\{A\}\cap\{B\} = 0$. Фактически эта формула присутствует в работе [7] как ***следствие 1.3***, но условие ее применения как нулевое пересечение подпространств $\{A\}$ и $\{B\}$ не расшифровывается. В результате важность этой формулы не подчеркивается. Так в справочниках по теории матриц [8], [9] есть формула Клайна, но нет ее следствий.

В разделе, посвященном выражениям $A(\tilde{B}A)^+$ и $(\tilde{B}\hat{A})^+$, рассматриваются произвольные матрицы A и B с одинаковым числом строк. Как обобщение **теорем 1** и **2** получено, что эти выражения являются проекторами. Причем

$$(\tilde{B}\hat{A})^+ = P((\{A\}\cap\{B\})^\perp_{\{A\}}, \{B\} + (\{A\} + \{B\})^\perp).$$

В **теореме 5** получен важный критерий: два подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ пересекаются исключительно по нулевому вектору тогда и только тогда, когда

$$B(\tilde{A}B)^+ B = B.$$

Заметим, что последнее равенство присутствует и в работе [7], но там оно не связывается с пересечением подпространств.

Средства и методы

Перечислим важные свойства псевдообратной матрицы, а также некоторые другие факты, на которые будем ссылаться [9–16].

Следующие уравнения Пенроуза могут служить определением псевдообратной матрицы. Для произвольной прямоугольной матрицы A существует единственная матрица A^+ такая, что выполняются равенства:

$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+; \quad (8)$$
$$(AA^+)^* = AA^+,\ (A^+A)^* = A^+A.$$

Следующие два свойства выполняются для произвольных матриц:

$$(A^+)^+ = A; \quad (9)$$
$$(A^*)^+ = (A^+)^*. \quad (10)$$

Если A невырожденная квадратная матрица, то

$$A^+ = A^{-1}. \quad (11)$$

Если A имеет полный ранг по столбцам, то

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*,\ A^+ = I. \quad (12)$$

Если A имеет полный ранг по строкам, то

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1},\ AA^+ = I. \quad (13)$$

Пусть матрица A имеет скелетное разложение $A = XY$, где X — столбцовая матрица полного ранга, а Y — строчная матрица полного ранга. Тогда

$$A^+ = (XY)^+ = Y^+X^+; \quad (14)$$
$$A^+B = 0 \iff A^*B = 0. \quad (15)$$

Выражение AA^+ есть ортопроектор на образ матрицы A. Этот факт является обобщением (1) для произвольной матрицы A:

$$P(\{A\}) = \hat{A} = AA^+. \quad (16)$$

Для произвольной матрицы A естественно определить $\tilde{A} = I - AA^+$.

Для любой матрицы A выражение A^+A есть ортопроектор на образ матрицы A^*:

$$P(\{A^*\}) = A^+A. \quad (17)$$

Выполняются равенства:

$$\tilde{A}\hat{A} = \hat{A}\tilde{A} = 0;\quad \tilde{A}A = 0;\ A^*\tilde{A} = 0. \quad (18)$$

Пусть X, U и Y, V — пары дополнительных подпространств. Тогда сумма проекторов $P(X, U) + P(Y, V)$ является проектором тогда и только тогда, когда $X \subset V$ и $Y \subset U$ [4, 16], причем

$$P(X, U) + P(Y, V) = P(X + Y, U\cap V). \quad (19)$$

Если подпространства X, Y и Z попарно пересекаются только по нулевому вектору и $X + Y + Z = \mathbb{C}^n$, то

$$P(X + Y, Z) = P(X, Y + Z) + P(Y, X + Z). \quad (20)$$

Чтобы получить (20) из (19), достаточно положить $Z = U\cap V$ и показать, что $U = Y + Z$ и $V = X + Z$.

Из (20) следует, что для ортогональных подпространств U и V

$$P(U \oplus V) = P(U) + P(V). \quad (21)$$

Или, если для матриц X и Y выполняется $X^*Y = 0$, то $P([X : Y]) = \hat{X} + \hat{Y}$.

Дополнительный проектор

$$I - P(A, B) = P(B, A). \quad (22)$$

Результаты и обсуждение. Формула для косого проектора

Пусть A — столбцовая матрица полного ранга. Часто возникает вопрос о том, когда при проектировании при помощи проектора P столбцы A останутся линейно независимыми. Линейная зависимость столбцов матрицы PA означает, что существует ненулевой вектор β такой, что $PA\beta = 0$, или $A\beta \in \ker P$, или $\{A\}\cap\ker P \neq 0$. Ядром ортопроектора $P = \hat{B}$ является $\ker \hat{B} = \{B\}^{\perp}$, а ядром ортопроектора $P = \tilde{B}$ будет $\ker \tilde{B} = \{B\}$. Эти соображения позволяют сформулировать важную лемму.

Лемма. *Пусть матрица A — столбцовая полного ранга и у матрицы B такое же число строк, как и у матрицы A.*

Тогда матрица $\hat{B}A$ *— столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда* $\{A\} \cap \{B\}^{\perp} = 0$.

Матрица $\tilde{B}A$ *— столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда* $\{A\}\cap\{B\} = 0$.

Заметим, что как только столбцы матрицы $\tilde{B}A$ (или $\hat{B}A$) линейно независимые, то и матрица $A^*\tilde{B}A$ (или $A^*\hat{B}A$) обратимая, как имеющая ненулевой определитель Грама.

Пусть столбцы двух матриц $A = [a_1,\ldots, a_k]$ и $B = [b_1,\ldots, b_l]$ вместе составляют базис всего пространства и $n = k + l$. Наша цель — построить $P = P(A, B)$, т. е. проектор на подпространство $\{A\}$ вдоль подпространства $\{B\}$.

Так как столбцы матриц A и B составляют базис, то любой вектор $v \in \mathbb{C}^n$ можно представить в виде

$$v = A\alpha + B\beta = Qu,$$

здесь $Q = [A : B]$, $\alpha \in \mathbb{C}^k$, $\beta \in \mathbb{C}^l$, $u = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$.

Проекцией вектора v будет вектор

$$Pv = A\alpha.$$

Так как матрица Q невырожденная, то

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix}X \\ Y\end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = Q^{-1}v = \begin{bmatrix}Xv \\ Yv\end{bmatrix}$$

Получаем для вектора Pv выражение:

$$Pv = AXv.$$

Таким образом,

$$P = AX.$$

Для определения матрицы X запишем уравнение:

$$AX + BY = I_n. \quad (23)$$

Умножим уравнение (23) слева на матрицу $A^*\tilde{B}$. Учитывая (18), получим

$$A^*\tilde{B}AX = A^*\tilde{B}.$$

Так как по лемме матрица $A^*\tilde{B}A$ не вырождена, то $X = (A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}$. Учитывая, что $\tilde{B}A$ — столбцовая матрица полного ранга, в силу (12)

$$P = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B} = A(\tilde{B}A)^+. \quad (24)$$

Полученный результат позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A и B две матрицы с одинаковым числом строк. Причем подпространства* $\{A\}$ *и* $\{B\}$ *являются дополнительными. Тогда проектор на подпространство* $\{A\}$ *вдоль подпространства* $\{B\}$ *дается выражением*

$$P(A, B) = A(\tilde{B}A)^+. \quad (25)$$

Причем если $\{A\}$ *— столбцовая матрица полного ранга, то*

$$P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}. \quad (26)$$

Важно, что в (25) в качестве матрицы A можно взять любую другую, имеющую тот же образ. В (26) — то же самое, только A должна быть столбцовой полного ранга. Часто имеет смысл выбирать столбцы A ортонормированными, тогда

$$A^*A = I; \quad A^+ = A^*; \quad \hat{A} = AA^*. \quad (27)$$

Учитывая (24), для завершения доказательства теоремы остается обосновать формулу (25) для случая произвольных матриц A и B, удовлетворяющих условию теоремы, а не только для случая матриц полного ранга.

В формуле (25) проектор $\tilde{B}$ определен однозначно для всех матриц B с одним и тем же образом.

Рассмотрим скелетное разложение матрицы A:$A = XY$. Матрица X имеет тот же образ, что и матрица A, и является столбцовой матрицей полного ранга; Y — строчная матрица полного ранга и $A(\tilde{B}A)^+ = XY(\tilde{B}XY)^+$.

В силу леммы $\tilde{B}X$ — столбцовая матрица полного ранга, так как подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ по условию теоремы пересекаются только по нулевому вектору. Поэтому можно применить (14) и, учитывая что $YY^+ = I$, записать

$$\begin{aligned}A(\tilde{B}A)^+ &= XY(\tilde{B}X\cdot Y)^+ = XYY^+(\tilde{B}X)^+ = \\ &= X(\tilde{B}X)^+ = P(A, B).\end{aligned} \quad (28)$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $\{A\}=\{X\}$. Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что в (26) столбцы матрицы $\tilde{B}A$ задают подпространство $\{B\}^{\perp}$. При этом матрицу A можно заменить другой матрицей полного ранга с тем же числом столбцов: $\{\tilde{B}A\} = \{\tilde{B}D\}$, если $\{B\}$ и $\{D\}$ — дополнительные подпространства.

Таким образом, формулу (26) можно записать так:

$$P(A, B) = A(D^*\tilde{B}A)^{-1}D^*\tilde{B}.$$

Так как образы $\tilde{B}A$ и $\tilde{B}D$ совпадают, то $\tilde{B}D = \tilde{B}A\cdot R$, где R — невырожденная матрица. Поэтому матрица $D^*\tilde{B}A = R^* \cdot A^*\tilde{B}A$ также невырожденная. Но в отличие от $A^*\tilde{B}A$ матрица $D^*\tilde{B}A$ уже не будет эрмитовой.

Положив $F = \tilde{B}D$, получим выражение [6, 17] для проектора:

$$P = A(FA)^{-1}F^*,$$

где для дополнительных подпространств $\{A\}$ и $\{F\}^{\perp}$ — образ и ядро проектора P. Как и для матрицы A, имеет смысл брать столбцы матрицы F ортонормированными.

Оказывается, что выражение $A(\tilde{B}A)^+$ будет неким проектором на подпространство $\{A\}$, даже когда столбцы матриц A и B не составляют базис пространства. Необходимо только, чтобы образы этих матриц пересекались по нулевому вектору.

В следующих двух теоремах выясняется вопрос, что это за проектор и определяются некоторые родственные выражения.

Теорема 2. *Пусть A и B две матрицы с одинаковым числом строк, причем $\{A\}\cap\{B\} = 0$. Тогда*

$$A(\tilde{B}A)^+ = (\tilde{B}\hat{A})^+. \qquad (29)$$

Матрица $A(\tilde{B}A)^+$ является проектором:

$$A(\tilde{B}A)^+ = P(\{A\}, \{B\} + (\{A\}+\{B\})^{\perp}). \qquad (30)$$

Симметричная сумма двух таких проекторов есть ортопроектор:

$$A(\tilde{B}A)^+ + B(\tilde{A}B)^+ = P([A:B]). \qquad (31)$$

Докажем (29).

Поскольку (28) устанавливает, что

$$A(\tilde{B}A)^+ = X(\tilde{B}X)^+$$

(требуется только, чтобы подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ пересекались по нулевому вектору), то, последовательно используя (9), (14) и (16), получаем

$$A(\tilde{B}A)^+ = X(\tilde{B}X)^+ = (X^+)^+(\tilde{B}X)^+ =$$

$$= (\tilde{B}X\cdot X^+)^+ = (\tilde{B}\hat{X})^+ = (\tilde{B}\hat{A})^+.$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $\{A\}=\{X\}$. Для дополнительных подпространств $\{A\}$ и $\{B\}$ из (29) следует формула Гревилла (4).

Для доказательства (30) положим, что столбцы матрицы C задают базис подпространства $(\{A\}+\{B\})^{\perp}$, и отметим, что $\{B\}$ и $\{C\}$ ортогональны так же, как $\{A\}$ и $\{C\}$. Кроме того, $D = [B{:}C]$. Тогда

$$P(\{A\}, \{B\} + (\{A\}+\{B\})^{\perp}) = P(A, D) = A(\tilde{D}A)^+.$$

По свойству (21) $\tilde{D} = \tilde{B} - \hat{C}$, поэтому

$$\tilde{D}A = (\tilde{B} - \hat{C})A = \tilde{B}A.$$

Откуда и следует (30).

Равенство (31) следует из (20) и (30):

$$A(\tilde{B}A)^+ + B(\tilde{A}B)^+ = P(\{A\}, \{B\}+\{C\}) +$$

$$+ P(\{B\}, \{A\}+\{C\}) = P(\{A\}+\{B\}, \{C\}) = P([A:B]).$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть A и B две матрицы с одинаковым числом строк, причем $\{A\}\cap\{B\} = 0$. Тогда*

$$(\tilde{B}A)^+A = A^+A; \qquad (32)$$

$$A^+A(\tilde{B}A)^+ = (\tilde{B}A)^+; \qquad (33)$$

$$(\tilde{B}A)^+ = A^+ - A^+B(\tilde{A}B)^+. \qquad (34)$$

Для любых двух матриц A и B с одинаковым числом строк

$$(\tilde{B}A)^+B = 0. \qquad (35)$$

Чтобы доказать (32), используем скелетное разложение матрицы $A = XY$

$$(\tilde{B}A)^+A = (\tilde{B}XY)^+XY = Y^+(\tilde{B}X)^+XY =$$

$$= Y^+(X^*\tilde{B}X)^{-1}X^*\tilde{B}XY = Y^+Y = A^+A.$$

Аналогично доказывается равенство (33).

Преобразуем правую часть (34), учитывая последовательно (30), (22), (20), (33):

$$A^+ - A^+B(\tilde{A}B)^+ = A^+(I - B(\tilde{A}B)^+) =$$

$$= A^+(I - P(\{B\},\{A\} + (\{A\}+\{B\})^{\perp})) =$$

$$= A^+P(\{A\} + (\{A\}+\{B\})^{\perp}, \{B\}) =$$

$$= A^+(P(\{A\},\{B\} + (\{A\}+\{B\})^{\perp}) +$$

$$+ P((\{A\}+\{B\})^{\perp}, \{A\}+\{B\})) =$$

$$= A^+(A(\tilde{B}A)^+ + P((\{A\}+\{B\})^{\perp})) = (\tilde{B}A)^+.$$

Слагаемое $A^+P((\{A\}+\{B\})^{\perp})$ в предпоследнем выражении равно нулю, так как равенство его нулю по свойству (15) эквивалентно

$$A^*P((\{A\}+\{B\})^{\perp}) = 0,$$

что очевидно выполняется.

Равенство (35) выполняется для любых матриц A и B с одинаковым числом строк. Действительно, $(\tilde{B}A)^*B = A^*\tilde{B}B = 0$, учитывая (18). Отсюда, применив (15), получим $(\tilde{B}A)^+B = 0$. Другое обоснование этого факта смотри есть в работе [7]. Доказательство теоремы 3 завершено.

Вернемся к уравнению (23). Мы получили, что $X = (\tilde{B}A)^+$. Точно также $Y = (\tilde{A}B)^+$. Это дает обратную матрицу для блочной матрицы

$$[A:B]^{-1} = \begin{bmatrix} (\tilde{B}A)^+ \\ (\tilde{A}B)^+ \end{bmatrix}.$$

Данная формула может быть распространена на случай, когда $\{A\}+\{B\} \subset \mathbb{C}^n$.

Следствие 1. *Если* $\{A\}\cap\{B\}=0$, *то*

$$[A:B]^{+}=\begin{bmatrix}(\tilde{B}A)^{+}\\(\tilde{A}B)^{+}\end{bmatrix}. \qquad (36)$$

Эта формула доказывается непосредственной проверкой уравнений (8), при этом учитываются равенства (31) и (32), (33), (35).

Формула Клайна [7] позволяет вычислить псевдообратную матрицу для блочной матрицы $[A{:}B]$ для произвольных матриц A и B. Равенство (36) есть частный случай этой формулы. В работе [7] фактически доказано следующее следствие, имеющее отношение к данному случаю.

Следствие 1.3. *Следующие три условия эквивалентны*:

$$[A:B]^{+}=\begin{bmatrix}A^{+}-A^{+}B(\tilde{A}B)^{+}\\(\tilde{A}B)^{+}\end{bmatrix};$$

$$(\tilde{A}B)^{+}(\tilde{A}B)B^{*}A^{+*}A^{+}B=B^{*}A^{+*}A^{+}B; \qquad (37)$$

$$B(\tilde{A}B)^{+}B=B.$$

Отметим, что в условиях ***следствия 1***, т. е. при $\{A\}\cap\{B\}=0$, условие $B(\tilde{A}B)^{+}B=B$ выполняется в силу (32) и (8). (Сравнение (36) с (37) доказывает тождество (34).) Оказывается, что данное условие эквивалентно тому, что $\{A\}\cap\{B\}=0$ — подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ пересекаются по нулевому вектору. Этот факт доказан в **теореме 5** для произвольных матриц A и B [18, 19].

Проекторы $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$ и $A(\tilde{B}A)^{+}$

В условиях **теоремы 2** матричные выражения $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$ и $A(\tilde{B}A)^{+}$ задают один и тот же проектор. Известно, что для любых ортопроекторов F и E матрица $(FE)^{+}$ является проектором [20]. В данном разделе выясняется, что за проектор задает выражение $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$ для произвольных матриц A и B. Оказывается, выражение $A(\tilde{B}A)^{+}$ также всегда является проектором.

Пусть A и B две произвольные матрицы с одинаковым числом строк. Рассмотрим следующие подпространства: $\mathcal{A}=\{A\}$, $\mathcal{B}=\{\mathrm{B}\}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $\mathcal{X}=\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}^{\perp}$ и $\mathcal{Z}=\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}^{\perp}$ так, что $\mathcal{A}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Z}\oplus\mathcal{Y}$. Пусть матрицы X, Y, Z составлены из базисных векторов подпространств $\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}$, соответственно.

Рассмотрим скелетное разложение матриц A и B:

$$A=[X:Y]P=XP_1+YP_2,\ \text{где}\ P=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}; \qquad (38)$$

$$B=[Z:Y]Q=ZQ_1+YQ_2,\ \text{где}\ Q=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}. \qquad (39)$$

Причем $Y^{*}X=0$ и $Y^{*}Z=0$, так что выполняются равенства:

$$\hat{Y}\hat{Z}=\hat{X}\hat{Y}=0;\ \hat{Z}Y=0;\ X^{*}\hat{Y}=0;\ X^{*}\tilde{Z}Y=0, \qquad (40)$$

и подобные им.

В силу (21) выполняются равенства:

$$\hat{A}=\hat{X}+\hat{Y};\quad \hat{B}=\hat{Z}+\hat{Y}.$$

Рассмотрим выражение $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$:

$$(\tilde{B}\hat{A})^{+}=((I-\hat{Y}-\hat{Z})(\hat{X}+\hat{Y}))^{+}=$$
$$=(\hat{X}-\hat{Z}\hat{X})^{+}=(\tilde{Z}\hat{X})^{+}=X(\tilde{Z}X)^{+}=$$
$$=P(\mathcal{X},\mathcal{Z}+\mathcal{Y}+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp})=P(\mathcal{X},\mathcal{B}+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp}).$$

Аналогично (31)

$$(\tilde{B}\hat{A})^{+}+(\tilde{A}\hat{B})^{+}=P(\mathcal{X},\mathcal{Z}+\mathcal{Y}+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp})+$$
$$+P(\mathcal{Z},\mathcal{X}+\mathcal{Y}+(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\perp})=P(\mathcal{X}+\mathcal{Z}).$$

Второе выражение

$$A(\tilde{B}A)^{+}=A((I-\hat{Y}-\hat{Z})[X:Y]P)^{+}=$$
$$=A([\tilde{Z}X:0]P)^{+}=A(\tilde{Z}XP_1)^{+}.$$

В силу леммы столбцы матрицы $\tilde{Z}X$ линейно независимы; строки матрицы P_1 линейно независимы по построению в (38), поэтому к матрице $\tilde{Z}XP_1$ применимо (14):

$$A(\tilde{B}A)^{+}=[X:Y]PP_1^{+}(\tilde{Z}X)^{+}=$$
$$=X(\tilde{Z}X)^{+}+YP_2P_1^{+}(\tilde{Z}X)^{+}. \qquad (41)$$

Докажем, что это проектор. Для этого обозначим два последних слагаемых через α и β, соответственно. По **теореме 2** $\alpha=X(\tilde{Z}X)^{+}$ является проектором. Учитывая, что $(\tilde{Z}X)^{+}=(X^{*}\tilde{Z}X)^{-1}X^{*}\tilde{Z}$ в силу (12), $\alpha\beta=0$, $\beta\alpha=\beta$ и $\beta_2=0$. Так что $(\alpha+\beta)^2=\alpha+\beta$.

Слагаемое α есть проектор $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$. Так как Y — столбцовая матрица полного ранга, а $(\tilde{Z}X)^{+}$ — строчная матрица полного ранга, то слагаемое $\beta=YP_2P_1^{+}(\tilde{Z}X)^{+}$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $P_2P_1^{+}=0$. По свойству (15) $P_2P_1^{+}=0$ тогда и только тогда, когда $P_2P_1^{*}=0$.

Таким образом, доказана **теорема 4**, утверждающая следующие условия.

Пусть A и B две матрицы с одинаковым числом строк. Тогда матричное выражение $(\tilde{B}A)^{+}$ *является проектором*:

$$(\tilde{B}\hat{A})^{+}=P((\{A\}\cap\{B\})_{\{A\}}^{\perp},\{B\}+(\{A\}+\{B\})^{\perp}). \qquad (42)$$

Симметричная сумма двух таких проекторов является ортопроектором:

$$(\tilde{B}\hat{A})^{+}+(\tilde{A}\hat{B})^{+}=P((\{A\}\cap\{B\})_{\{A\}}^{\perp}+(\{A\}\cap\{B\})_{\{B\}}^{\perp}).$$

Матрица $A(\tilde{B}A)^{+}$ *всегда является проектором*:

$$A(\tilde{B}A)^{+}=(\tilde{B}\hat{A})^{+}+YP_2P_1^{+}(\tilde{Z}X)^{+}. \qquad (43)$$

Проекторы $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$ *и* $A(\tilde{B}A)^{+}$ *совпадают при* $\{A\}\cap\{B\}=0$ *или при* $\{A\}\cap\{B\}\neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $P_2P_1^{*}=0$, *т. е. строки матриц* P_1 *и* P_2, *определяющих скелетное разложение (38), ортогональны друг другу*.

При доказательстве следующей теоремы воспользуемся обозначениями из доказательства **теоремы 4**.

Теорема 5. *Пусть A и B — две матрицы с одинаковым числом строк. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

$$B(\tilde{A}B)^{+}B=B; \quad (44)$$

$$\{A\}\cap\{B\}=0, \quad (45)$$

подпространства $\{A\}$ *и* $\{B\}$ *пересекаются по нулевому вектору*.

Чтобы доказать, что из (44) следует (45), предположим, что существует ненулевое пересечение подпространств $\{A\}$ и $\{B\}$. После этого в равенстве $B(\tilde{A}B)^{+}B=B$ можем перейти к матрицам X,Y,Z,Q_1Q_2 из (38) и (39). Использовав (40) и (41), получим

$$ZQ_1+YQ_2Q_1^{+}Q_1=ZQ_1+YQ_2.$$

Так как Y — столбцовая матрица полного ранга, то $Q_2Q_1^{+}Q_1=Q_2$. Возьмем сопряжение к этому равенству и обозначим $S_1=Q_1^{*}$ и $S_2=Q_2^{*}$. Получим $\tilde{S}_1S_2=0$. Но столбцы матриц S_1 и S_2 — линейно независимые векторы и по лемме столбцы матрицы $\tilde{S}_1S_2$ линейно независимы. Полученное противоречие доказывает, что из (44) следует (45).

Если выполняется условие (44), то в силу (32) и (8) имеем

$$B(\tilde{A}B)^{+}B=B(B^{+}B)=B\cdot$$

Выводы

Основной результат данной работы — это выражение для проектора:

$$P(A,B)=A(A^{*}\tilde{B}A)^{-1}A^{*}\tilde{B}.$$

Подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ дополнительные, матрицы A и B столбцовые полного ранга.

Если не требовать дополнительности подпространств, оставить только условие $\{A\}\cap\{B\}=0$, то выражение

$$A(\tilde{B}A)^{+}=(\tilde{B}\hat{A})^{+}=P(\{A\},\{B\}+(\{A\}+\{B\})^{\perp})$$

остается проектором.

Пусть A и B — произвольные матрицы с одинаковым числом строк. Показано, что выражения $A(\tilde{B}A)^{+}$ и $(\tilde{B}\hat{A})^{+}$ являются проекторами и, в общем, различны. Причем

$$(\tilde{B}\hat{A})^{+}=P((\{A\}\cap\{B\})^{\perp}_{\{A\}},\{B\}+(\{A\}+\{B\})^{\perp}).$$

Получен важный критерий: $\{A\}$ и $\{B\}$ пересекаются лишь только по нулевому вектору тогда и только тогда, когда

$$B(\tilde{A}B)^{+}B=B.$$

Теоремы 1–5, **лемма** и ***следствие 1*** вместе составляют технический аппарат, позволяющий проводить вычисления для различных выражений с проекторами. Примеры таких вычислений планируется привести в следующих статьях.

Список литературы

[1] Afriat S.N. Orthogonal and oblique projectors and the characteristics of pairs of vector spaces // Proc. of the Cambridge Philosophical Society, 1957, v. 53, iss. 4, pp. 800–816.

[2] Воеводин В.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 544 с.

[3] Greville T.N.E. Solutions of the matrix equation XAX=X, and relations between oblique and orthogonal projectors // SIAM J. Appl. Math., 1974, v. 26, no. 4, pp. 828–832.

[4] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.

[5] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991. 400 с.

[6] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra // The Mathematical Gazette, SIAM, 2000, v. 85, iss. 502, 718 p.

[7] Cline R. E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix // J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, pp. 588–600.

[8] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY.:Wiley, 1996. 304p.

[9] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Princeton University Press, 2009, 1101 p.

[10] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Pub., 1979, 272 p.

[11] Cvetković Ilić D. S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Springer, Singapore, 2017, 194 p.

[12] Haruo Yanai, Kei Takeuchi, Yoshio Takane Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. Springer, 2011, 234 p.

[13] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. NY&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.

[14] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.

[15] Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 496 с.

[16] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986. 229 с.

[17] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2008. 496 с.

[18] Ветошкин А.М. Компактная форма формулы Клайна // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014. Т. 21. Вып. 4. С. 337–338.

[19] Ветошкин А.М. Следствия из формулы Клайна // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015. Т. 22. Вып. 4. С. 446–447.

[20] Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, v. 51, pp. 406–413.

Сведения об авторах

Ветошкин Александр Михайлович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), vetkin@mgul.ac.ru, alexander.vetkin@gmail.com

Шум Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТГТУ, shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 09.01.2019.

Принята к публикации 04.02.2019.

MATRIX EXPRESSIONS DEFINING THE OBLIQUE PROJECTOR

A.M. Vetoshkin[1], A.A. Shum[2]

[1]BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia
[2]Tver' State Technical University named after Afanasiy Nikitin, 22, 170026, Tver', Russia

vetkin@mgul.ac.ru

A well-known and often used formula for an orthoprojector is: $\hat{A} = A(A^*A)^{-1}A^*$, where A is a full-rank column matrix; the columns of the matrix A define the subspace on which the orthogonal projection is performed. This article proposes an expression for an oblique projector through two full-rank matrices A and B, the columns of which define range and the null space of this projector: $P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B},\ \tilde{B} = I - \hat{B}.$ This formula differs in symmetry from other known expressions in the literature [6, 17]: the matrix $A^*\tilde{B}A$ is Hermitian. In deriving this result, as well as many others, a simple lemma proved to be very useful: if A is a full rank column matrix, then $\tilde{B}A$ remains a full rank matrix if and only if $\{A\} \cap \{B\} = 0$. It has long been known that the generalized inverse matrix of the product of any two Hermitian projectors is some kind of projector. In this paper, the range and the null space of this projector are defined for arbitrary Hermitian projectors. An important criterion is obtained that two subspaces defined by columns of matrix A and B intersect along the zero vector: $B(\tilde{A}B)^+B = B.$

Keywords: projector, orthoprojector, oblique projector, generalized inverse matrix, Cline's formula

Suggested citation: Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Matrichnye vyrazheniya, zadayushchie kosoy proektor* [Matrix expressions defining the oblique projector]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 107–113. DOI: 10.18698/2542-1468-2019-3-107-113

References

[1] Afriat S.N. Orthogonal and oblique projectors and the characteristics of pairs of vector spaces. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, 1957, v. 53, iss. 4, pp. 800–816.
[2] Voevodin V.V. *Entsiklopediya lineynoy algebry. Elektronnaya sistema LINEAL* [Encyclopedia of linear algebra. Electronic system LINEAL]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg, 2006, 544 p.
[3] Greville T.N.E. Solutions of the matrix equation XAX=X, and relations between oblique and orthogonal projectors. SIAM J. Appl. Math., 1974, v. 26, no. 4, pp. 828–832.
[4] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.
[5] Malyshev A.N. *Vvedenie v vychislitel'nuyu lineynuyu algebru* [Introduction to Computational Linear Algebra]. Novosibirsk: Nauka, 1991. 400 p.
[6] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. The Mathematical Gazette, SIAM, 2000, v. 85, iss. 502, 718 p.
[7] Cline R. E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, pp. 588–600.
[8] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY.:Wiley, 1996. 304p.
[9] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Princeton University Press, 2009, 1101 p.
[10] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Pub., 1979, 272 p.
[11] Cvetković Ilić D.S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Springer, Singapore, 2017, 194 p.
[12] Haruo Yanai, Kei Takeuchi, Yoshio Takane Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. Springer, 2011, 234 p.
[13] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. NY&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.
[14] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.
[15] Magnus J.R., Neudecker H. *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike* [Matrix differential calculus. With applications in statistics and econometrics]. Moscow: Fizmatlit, 2002, 496 p.
[16] Postnikov M.M. *Lektsii po geometrii. Semestr II. Lineynaya algebra* [Lectures on geometry. Semester II. Linear algebra]. Moscow: Nauka, 1986. 229 p.
[17] Beklemishev D.V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebry* [Additional chapters of linear algebra]. Saint Petersburg: Lan', 2008. 496 p.
[18] Vetoshkin A.M. *Kompaktnaya forma formuly Klayna* [Compact form of the Cline formula]. Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review app. and industrial Math.], 2014, t. 21, v. 4, pp. 337–338.
[19] Vetoshkin A.M. *Sledstviya iz formuly Klayna* [Consequences from Clin's formula] Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review app. and industrial Math.], 2015, t. 22, v. 4, pp. 446–447.
[20] Penrose R. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, v. 51, pp. 406–413.

Authors' information

Vetoshkin Aleksandr Mikhaylovich — Cand. Sci. (Tech), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), vetkin@mgul.ac.ru

Shum Aleksandr Anatol'evich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 09.01.2019.

Accepted for publication 04.02.2019.