ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 2. С. 140–143. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

УДК 512.643.4 DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-140-143

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ СИЛЬВЕСТРА В СЛУЧАЕ КОММУТИРУЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.М. Ветошкин[1], А.А. Шум[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1
[2]Тверской государственный технический университет, 170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, д. 22

vetkin@mgul.ac.ru

Неявное уравнение Сильвестра $AXG + FXB = C$ имеет два важных частных случая: непрерывное уравнение Сильвестра $AX + XB = C$ и дискретное уравнение Сильвестра $AXB - X = C$. Хорошо известны условия однозначной разрешимости этих уравнений. В работе показано, что если выполняются условия однозначной разрешимости этих уравнений и матрицы A и B перестановочны, то матрица $(A + B)$ для непрерывного уравнения Сильвестра и матрица $(AB - I)$ для дискретного уравнения Сильвестра неособенные. Решения указанных уравнений имеют простой вид, когда среди матриц A, B, C пара A, B и еще одна пара перестановочны: непрерывное уравнение Сильвестра имеет решение $X = C(A + B)^{-1}$ или $X = (A + B)^{-1}C$, дискретное уравнение Сильвестра имеет решение $X = C(AB - I)^{-1}$ или $X = (AB - I)^{-1}C$.

Ключевые слова: дискретное и непрерывное уравнения Сильвестра, условия разрешимости уравнений Сильвестра, аннулирующий вектор многочлен

Ссылка для цитирования: Ветошкин А.М., Шум А.А. Решение матричных уравнений Сильвестра в случае коммутирующих коэффициентов // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 2. С. 140–143. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-140-143

Ряд задач линейной теории оптимального управления [1–3] приводит к уравнениям Сильвестра. Так, знаменитое уравнение Ляпунова [4] является частным случаем уравнения Сильвестра.

Цель работы

Основной целью данной работы является получение утверждения о том, что если выполняются условия однозначной разрешимости уравнений Сильвестра и матрицы A и B перестановочны, то матрица $(A + B)$ для непрерывного уравнения Сильвестра и матрица $(AB - I)$ для дискретного уравнения Сильвестра неособенные.

Методы решения

Обозначим через $\lambda(A)$ множество собственных значений квадратной матрицы A, при этом i-е собственное значение этой матрицы будет иметь обозначение $\lambda_i(A)$. Через I_n (или просто I) обозначаем единичную матрицу порядка n. Будем рассматривать уравнения Сильвестра с квадратными матрицами A, B, C, X. Известны следующие результаты об однозначной разрешимости уравнений Сильвестра [5, 6].

Теорема 1. *Непрерывное уравнение Сильвестра*

$$AX + XB = C \tag{1}$$

однозначно разрешимо для любой правой части C, если

$$\forall i, j \quad \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Дискретное уравнение Сильвестра*

$$AXB - X = C \tag{3}$$

однозначно разрешимо для любой правой части C, если

$$\forall i, j \quad \lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1. \tag{4}$$

Если в уравнении (1) матрицы A и X перестановочны, то получаем $X = C(A + B)^{-1}$. Для уравнения (3) аналогично: $X = C(AB - I)^{-1}$.

Уравнения Сильвестра с перестановочными коэффициентами не так уж редко встречаются. Например, в работе [7] появляется уравнение $AX + XA = F(A)$, где F — полином. В разд. 2 [7] показано, что для невырожденности матриц $A + B$ и $AB - I$ при условиях однозначной разрешимости соответствующего уравнения достаточно перестановочности матриц A и B. В разд. 3 [7] получены простые решения уравнений Сильвестра, когда среди матриц A, B, C пара A, B и еще одна пара перестановочны.

Невырожденность матриц $A + B$, $AB - I$

Если матрицы A и B перестановочны, то верны следующие утверждения.

Теорема 3. *Если для матриц A и B выполняются условия (2) и, кроме того, эти матрицы перестановочны, то матрица A + B невырожденная.*

Теорема 4. *Если для матриц A и B выполняются условия (4) и, кроме того, эти матрицы перестановочны, то матрица AB – I невырожденная.*

Доказательство теоремы 3. Допустим, что матрица $A + B$ вырожденная. Тогда у матрицы $A + B$ есть собственный вектор x_0 с собственным значением 0: $(A + B)x_0 = 0$.

Положим

$$x_1 = Ax_0 = -Bx_0. \tag{5}$$

Вектор x_1 ненулевой, так как иначе было бы $Ax_0 = Bx_0 = 0$ и ноль оказался бы собственным значением матриц A, B, что нарушает условие (2).

Воспользовавшись перестановочностью матриц A, B и формулой (5), получим

$$A^2x_0 = -ABx_0 = -BAx_0 = B^2x_0;$$

$$(A^2 - B^2)x_0 = (A + B)(A - B)x_0 = 2(A + B)x_1 = 0.$$

Таким образом, x_1 — также собственный вектор матрицы $A + B$, соответствующий собственному значению 0.

Определим векторы $x_i = Ax_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Проделав операции, аналогичные операциям с вектором x_1, приходим к тому, что эти векторы являются собственными векторами матрицы $A + B$. Кроме того,

$$x_i = A^ix_0,\ Ax_i = -Bx_i,\ A^ix_0 = (-1)^iB^ix_0. \tag{6}$$

Пусть $\varphi(\lambda)$ — минимальный аннулирующий вектор x_0 многочлен

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i, \quad \alpha_k = 1, \text{ т. е.}$$

$$\varphi(A)x_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i x_0 = 0.$$

Учитывая (6), получаем

$$\varphi(A)x_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i x_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (-1)^i B^i x_0 = 0.$$

Таким образом, $\psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (-1)^i \lambda^i$ есть аннулирующий вектор x_0 многочлен для матрицы B.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни уравнения $\varphi(\lambda) = 0$, т. е.

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j), \tag{7}$$

Тогда

$$\psi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\lambda + \lambda_j) \tag{8}$$

и корни уравнения $\psi(\lambda) = 0$ — это $-\lambda 1$, $-\lambda 2$, ..., $-\lambda k$.

Известно, что для любого вектора x минимальный многочлен матрицы A делится на минимальный аннулирующий вектор x многочлен ([8], с. 66). Таким образом, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ являются собственными значениями матрицы A.

Для матрицы B многочлен $\psi(\lambda)$ как аннулирующий вектор x_0 многочлен делится на минимальный аннулирующий вектор x_0 многочлен, корни которого являются собственными значениями B. Поэтому часть корней уравнения $\psi(\lambda) = 0$ являются собственными значениями матрицы B. Учитывая (7) и (8), получаем противоречие с условием (2):

$$\lambda_i + (-\lambda_i) = 0, \quad \lambda_i \in \lambda(A), \quad -\lambda_i \in \lambda(B).$$

Теорема 3 доказана.

Лемма. *Пусть матрицы A и B перестановочны. Если x — собственный вектор матрицы $AB - I$ с собственным значением 0, то $y = Ax$ — собственный вектор этой матрицы для того же собственного значения.*

Доказательство леммы. Из того, что $(AB - I)x = 0$, следует $ABx = x$ и $By = x$. Из последнего равенства следует, что если $y = 0$, то и $x = 0$. Но $x \neq 0$, поэтому вектор y — ненулевой. Далее:

$$(AB - I)y = (AB - I)Ax = A(AB - I)x = 0.$$

Таким образом, y — собственный вектор матрицы $AB - I$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Допустим, что матрица $(AB - I)$ — вырожденная. Тогда у матрицы $AB - I$ есть собственный вектор x_0 с собственным значением 0: $(AB - I)x_0 = 0$.

Определим векторы $x_i = Ax_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Из леммы следует, что все x_i — собственные векторы матрицы $AB - I$ с собственным значением 0. Так как $(AB - I)x_i = 0$, то $ABx_i = x_i = B(Ax_i) = Bx_{i+1}$, поэтому $Bx_{i+1} = x_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Кроме того,

$$x_i = B^{k-i}x_k,\ i = 0, \ldots, k-1. \tag{9}$$

Пусть $\varphi(\lambda)$ — минимальный аннулирующий вектор x_0 многочлен

$$\varphi(A)x_0 = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i x_0 = 0, \quad \alpha_k = 1.$$

Докажем, что $\alpha_0 \neq 0$. Пусть $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$, $\alpha_s \neq 0$, тогда

$$\varphi(A)x_0 = \sum_{i=s}^{k} \alpha_i A^i x_0 = A^s \sum_{i=s}^{k} \alpha_i A^{i-s} x_0 = 0.$$

Вектор $\sum_{i=s}^{k} \alpha_i A^{i-s} x_0$ не равен нулю, иначе $\sum_{i=s}^{k} \alpha_i \lambda^{i-s}$ был бы аннулирующим вектор x_0 многочленом меньшей, чем k, степени. Этот вектор является собственным вектором матрицы $AB - I$.

Поэтому из леммы следует, что вектор

$$\varphi(A)x_0 = A^s\sum_{i=s}^{k}\alpha_i A^{i-s}x_0 \text{ — ненулевой.}$$

Полученное противоречие доказывает, что $\alpha_0 \neq 0$.

Учитывая (9), получаем

$$\varphi(A)x_0 = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i A^i x_0 = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_i = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i B^{k-i}x_k = 0.$$

Таким образом,

$$\psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i\lambda^{k-i}, \quad \alpha_k = 1, \quad \alpha_0 \neq 0, \qquad (10)$$

и $\psi(\lambda)$ — аннулирующий вектор x_k многочлен для матрицы B.

Как и в теореме 3, выполняется равенство (7), $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — корни уравнения $\varphi(\lambda) = 0$. Причем эти корни являются собственными значениями матрицы A.

В силу выражения (10) многочлены $\psi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$ таковы, что $\psi(\lambda) = \lambda^k\varphi(1/\lambda)$, поэтому корни уравнения $\psi(\lambda) = 0$ есть $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, ..., \lambda_k$.

Повторяя рассуждения из конца доказательства теоремы 3, получаем, что часть из этих корней — собственные значения матрицы B, причем $(1/\lambda_i)\,\lambda_i = 1$, $1/\lambda_i \in \lambda(B)$, $\lambda_i \in \lambda(A)$. Следовательно, условие однозначности (4) нарушено. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.

Решение уравнений Сильвестра в случае коммутирующих коэффициентов

Среди работ, посвященных уравнению Сильвестра, известны такие, в которых даются конечные выражения для решений непрерывного [9] и дискретного [10] уравнений Сильвестра. К ним относятся и две нижеследующие простые теоремы.

Теорема 5. *Если для непрерывного уравнения Сильвестра (1) выполняется условие однозначности (2) и матрицы A и B перестановочны, то решение данного уравнения есть*

$$X = C(A + B)^{-1} \quad (X = (A + B)^{-1}C) \qquad (11)$$

тогда и только тогда, когда

$$AC = CA \quad (BC = CB) \qquad (12)$$

Доказательство теоремы 5. Из теоремы 3 следует, что $D = (A + B)^{-1}$ существует. Отметим, что B и D перестановочны. Из выражения (11) следует, что

$$ACD + CDB = (AC + CB)D = C,$$

$$AC + CB = CD^{-1} = C(A + B) \Leftrightarrow AC = CA.$$

Пусть выполняется равенство (12). Убедимся, что выражение (11) является решением уравнения, подставив $X = CD$ в уравнение (1):

$$ACD + CDB = C(A + B)D = C.$$

Возможны случаи, когда выполняются условия (2), (11) и (12), но матрицы A и B не являются коммутативными. Например:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -5/11 & 0 \\ 0 & 6/11 & -4/5 \\ -5 & 635/66 & -29/6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AC = CA = C, \quad \lambda(A) = \{1, 2, 3\},$$

$$\lambda(B) = \{-0{,}832, -0{,}833, -2{,}622\}.$$

Теорема 6. *Если для дискретного уравнения Сильвестра (3) выполняется условие однозначности (4) и, кроме того, AB = BA и AC = CA, то $X = C(AB - I)^{-1}$ является решением данного уравнения.*

Доказательство теоремы 6. Из теоремы 4 следует, что $D = (AB - I)^{-1}$ существует. Матрицы B и D перестановочны. По условиям теоремы (6),

$$ACDB - CD = C(AB - I)D = C.$$

Замечание. Если в формулировке теоремы 6 условие $AC = CA$ заменить на условие $BC = CB$, то решением будет $X = (AB - I)^{-1}C$.

Выводы

Установлено, что в случае перестановочности матричных коэффициентов A, B и однозначной разрешимости непрерывного (дискретного) уравнений Сильвестра матрицы $A + B$ $(AB - I)$ невырожденные. Это позволяет в ряде случаев выписать очень простые явные решения уравнений Сильвестра.

Список литературы

[1] Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1974. 424 с.

[2] Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980. 376 с.

[3] Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 653 с.

[4] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 276 с.

[5] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1977. 576 с.

[6] Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.

[7] Ветошкин А.М. Жорданова форма разности проекторов // Вычислительная математика и математическая физика, 2014. Т. 54. № 3. С. 375–390.

[8] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

[9] Шестопал В.Е. Решение матричного уравнения $AX - XB = C$ // Математические заметки, 1976. Т. 19. № 3. С. 449–451.

[10] Ветошкин А.М. Конечное выражение для решения дискретного уравнения Сильвестра // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2016. Т. 23. Вып. 4. С. 334–335.

Сведения об авторах

Ветошкин Александр Михайлович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), vetkin@mgul.ac.ru, alexander.vetkin@gmail.com

Шум Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета, shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 01.11.2017.
Принята к публикации 11.01.2018.

SOLVING MATRIX EQUATIONS OF SILVESTER FOR THE CASE OF COMMUTING COEFFICIENTS

A.M. Vetoshkin[1], A.A. Shum[2]

[1]BMSTU (Mytishchi branch), 1st. Institutskaya st., 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia
[2]Tver State Technical University named after Afanasy Nikitin, 22, Tver, 170026, Russia

vetkin@mgul.ac.ru

The implicit Sylvester equation $AXG + FXB = C$ has two important special cases: the continuous Sylvester equation $AX + XB = C$, and the discrete Sylvester equation $AXB - X = C$. The conditions for the unique solvability of these equations are well known. The main result of this paper is the assertion that if the conditions for the unique solvability of these equations are satisfied and the matrices A and B commute, then the matrix $(A + B)$ for the continuous Sylvester equation and the matrix $(AB - I)$ for the discrete Sylvester equation are nonsingular. The solutions of these equations have a particularly simple form when among the matrices A, B, C the pair A, B and one more pair commute: the continuous Sylvester equation has a solution $X = C(A + B)^{-1}$ or $X = (A + B)^{-1}C$, the discrete Sylvester equation has a solution $X = C(AB - I)^{-1}$ or $X = (AB - I)^{-1}C$.
Keywords: discrete and continuous Sylvester equations; conditions for the solvability of the Sylvester equations; polynomial annihilating vector

Suggested citation: Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Reshenie matrichnykh uravneniy Sil'vestra v sluchae kommutiruyushchikh koeffitsientov* [Solving matrix equations of Silvester for the case of commuting coefficients]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 140–143. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-140-143

References

[1] Andreev Yu.N. *Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob''ektami* [Managing finite-dimensional linear objects]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 424 p.
[2] Uonem M. *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya* [Linear multidimensional control systems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 376 p.
[3] Kvakernaak Kh., Sivan R. *Lineynye optimal'nye sistemy upravleniya* [Linear optimal control systems]. Moscow: Mir Publ., 1977, 653p.
[4] Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The general problem of the stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1950, 276 p.
[5] Gantmakher F.R. *Teoriya matrit*s [Matrix theory]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 576 p.
[6] Ikramov Kh.D. *Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniy* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 192 p.
[7] Vetoshkin A.M. *Zhordanova forma raznosti proektorov* [Zhordanov form of difference of projectors]. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014, v. 54, no. 3, pp. 375–390.
[8] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* [Matrices and calculations]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 320 p.
[9] Shestopal V.E. *Reshenie matrichnogo uravneniya $AX - XB = C$* [The solution of the matrix equation]. Matematicheskie zametki [Math notes], 1976, v. 19, pp. 449–451.
[10] Vetoshkin A.M. *Konechnoe vyrazhenie dlya resheniya diskretnogo uravneniya Sil'vestra* [The finite expression for the solution of the discrete Sylvester equation]. Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki [Survey of applied and industrial mathematics], 2016, v. 23, no. 4, pp. 334–335.

Authors' information

Vetoshkin Alexandr Mikhailovich — Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), vetkin@mgul.ac.ru

Shum Alexandr Anatolievich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 01.11.2017.
Accepted for publication 11.01.2018.