ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 2. С. 134–139. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

УДК 01-433; 01-435 DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-134-139

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАСТЯНУТОЙ НИТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

А.В. Брюквин, О.Ю. Брюквина

МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

bryukvin_a@mail.ru

Во многих технических задачах применяются гибкие нити. В работах по колебаниям гибких связей и нитей обычно рассматривается плоский случай поперечных колебаний, недостаточно анализируется взаимосвязь колебаний в различных плоскостях в пространственном случае. В тоже время эксперименты со струнами музыкальных инструментов, нитями в текстильном производстве и в космических тросовых системах показывают, что колебания чаще носят не плоский, а сложный пространственный характер. Не существует однозначного метода расчета движения гибкой нити, особенно в случае пространственного движения. В данной работе рассматривается малое пространственное поперечное движение гибкой деформируемой нити, которое включает и хорошо исследованное колебательное движение, представимое в виде разложения на формы по гармоническим функциям, и вращательное движение элементов нити вокруг оси, проходящей через точки закрепления, и комбинацию этих движений. Для более наглядного описания вращательного движения выбраны цилиндрические координаты. С помощью уравнений малых поперечных колебаний нити в двух перпендикулярных плоскостях декартовой системы координат путем замены переменных получены уравнения, в явном виде выделяющие величину отклонения элемента нити от прямолинейного первоначального положения и направление этого отклонения, описываемое углом. Данные уравнения позволяют проанализировать не только смещение элемента нити, но и вращение плоскости колебания вокруг первоначального статического положения. Получена оценка пространственной формы струны, записанная в цилиндрических координатах. Показано, что движение струны в общем виде складывается из отклонения точек, описываемого хорошо известным уравнением плоских колебаний и вращением их вокруг оси, проходящей через точки граничного закрепления. Колебание может представлять собой линию, форма которой определяется граничными и начальными условиями.

Ключевые слова: гибкая нить, колебания

Ссылка для цитирования: Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. О решении уравнений малых пространственных колебаний растянутой нити в цилиндрических координатах // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 2. С. 134–139. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-134-139

В данной работе рассматривается малое пространственное поперечное движение гибкой деформируемой нити, которое включает и хорошо исследованное колебательное движение, представимое в виде разложения на формы по гармоническим функциям [1–4], и вращательное движение элементов нити вокруг оси, проходящей через точки закрепления, и комбинацию этих движений. Как и в большинстве работ [5–8], рассматриваются свободные колебания при нулевых граничных условиях. Для более наглядного описания вращательного движения выбраны цилиндрические координаты.

Цель работы

С помощью уравнений малых поперечных колебаний нити в двух перпендикулярных плоскостях декартовой системы координат путем замены переменных получить уравнения, в явном виде выделяющие величину отклонения элемента нити от прямолинейного первоначального положения и направление этого отклонения, описываемое углом. Данные уравнения позволят проанализировать не только смещение элемента нити, но и вращение плоскости колебания вокруг первоначального статического положения, что бывает удобно при решении ряда задач [9, 10]. В результате решения получим описание пространственной формы струны, в цилиндрических координатах.

Постановка задачи

Решим задачу о поперечных колебаниях струны с предварительным натяжением силой $T = E\varepsilon$, где E — модуль упругости; ε — удлинение струны.

Нить натянута вдоль оси OX, и каждая ее точка характеризуется координатой s этой оси. Смещение элемента струны вдоль осей OY и OZ будем обозначать через v и w соответственно. Функции v и w являются функциями двух переменных: лагранжевой координаты s и времени t.

Уравнения малых поперечных колебаний в этом случае имеют вид:

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = E\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}; \quad \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \qquad (1)$$

где ρ — погонная плотность струны.

Преобразуем эти уравнения, перейдя к полярным координатам: $v = r \sin \varphi$ и $w = r \cos \varphi$, где r и φ — соответственно отклонение элемента нити от оси OX и угол, показывающий направления этого отклонения в плоскости, параллельной OYZ.

Эти функции зависят от двух переменных: s и t. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial r}{\partial s}\sin\varphi+r\frac{\partial\varphi}{\partial s}\cos\varphi;\quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial r}{\partial s}\cos\varphi-r\frac{\partial\varphi}{\partial s}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right)\sin\varphi+\left(2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial s}+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right)\cos\varphi-\left(2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial s}+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)\sin\varphi.$$

Перепишем уравнение (1) в виде проекций на радиальную и трансверсальную составляющие (вдоль r и перпендикулярно r), показанные на рис. 1.

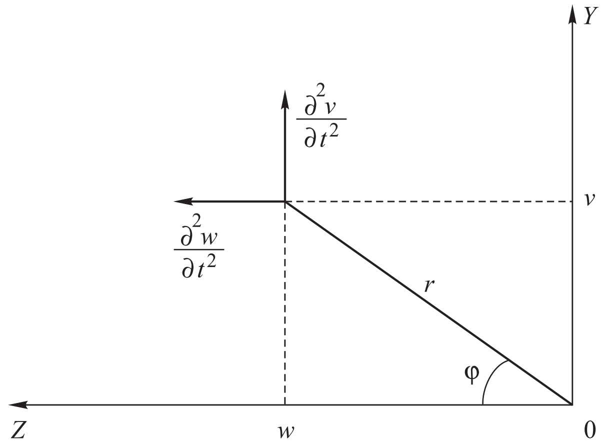

Рис. 1. Система координат
Fig. 1. The coordinate system

Радиальная составляющая ускорения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cos\varphi=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}v+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}w\right)=\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2.$$

С другой стороны,

$$\rho\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right)=E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\cos\varphi\right)=$$

$$=E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}-r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right).$$

Трансверсальная составляющая:

$$\rho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\cos\varphi-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\sin\varphi\right)=E\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\cos\varphi-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\sin\varphi\right);$$

$$\rho\left(2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=E\varepsilon\left(2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial s}+r\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right).$$

Если обозначить через a скорость поперечной волны ($a^2 = Es/\rho$), получим

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2}-r\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right)=a^2\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial s^2}-r\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right); & (2)\\ \rho\left(2\dfrac{\partial r}{\partial t}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+r\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=a^2\left(2\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}+r\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right). & (3)\end{cases}$$

Решением уравнений (2) являются любые функции, зависящие от ($s \pm at$), что можно определить подстановкой.

Сделаем замену переменных: $\xi = s - at$; $\eta = s + at$. Тогда

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\partial r}{\partial\xi}(-a)+\frac{\partial r}{\partial\eta}(a);\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(-a)+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(a);$$

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\frac{\partial r}{\partial\xi}+\frac{\partial r}{\partial\eta};\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 r}{\partial\xi^2}a^2-2\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\partial\eta}a^2+\frac{\partial^2 r}{\partial\eta^2}a^2;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}a^2-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}a^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}a^2;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 r}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 r}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}.$$

В уравнении (2) получаем

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\xi\partial\eta}=r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \qquad (4)$$

В уравнении (3) получаем

$$-r\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial r}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \qquad (5)$$

Будем решать систему уравнений (4), (5) методом разделения переменных. Предположим, что функции $r(\xi, \eta)$ и $\varphi(\xi, \eta)$ представимы в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ξ, а другая только от η:

$$r(\xi,\eta)=\tilde{r}(\xi)\tilde{r}(\eta);\ \ \varphi(\xi,\eta)=\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{\varphi}(\eta).$$

Тогда систему уравнений (4), (5) можно записать в виде

$$\frac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}=\tilde{\varphi}(\xi)\tilde{\varphi}(\eta)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}\tilde{r}(\xi)\tilde{r}(\eta); \qquad (6)$$

$$-\tilde{r}(\xi)\tilde{r}(\eta)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}=$$
$$=\tilde{r}(\xi)\frac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}\tilde{\varphi}(\eta)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}+\tilde{r}(\eta)\frac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}\tilde{\varphi}(\xi)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}. \qquad (7)$$

Поделив уравнение (6) на $\frac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}\tilde{\varphi}(\xi)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}\tilde{r}(\xi)$, а уравнение (7) на $\tilde{r}(\xi)\tilde{r}(\eta)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}$, получим

$$\frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}}{\tilde{r}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}}=\frac{\tilde{r}(\eta)\tilde{\varphi}(\eta)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}}; \quad (8)$$

$$(9)-1=\frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}\tilde{\varphi}(\eta)}{\tilde{r}(\eta)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}}+\frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}\tilde{\varphi}(\xi)}{\tilde{r}(\xi)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}}.$$

Левая часть уравнения (8) зависит только от ξ, а правая — только от η. Следовательно, равенство возможно только в случае, если левая и правая часть уравнения (8) являются константами:

$$\frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}}{\tilde{r}(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}}=\text{const};\quad \frac{\tilde{r}(\eta)\tilde{\varphi}(\eta)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}}=\text{const}. \quad (10)$$

Аналогичные рассуждения для уравнения (9) позволяют получить

$$\frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\xi)}{\partial\xi}\tilde{\varphi}(\xi)}{\tilde{r}(\xi)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}}=\text{const};\quad \frac{\dfrac{\partial\tilde{r}(\eta)}{\partial\eta}\tilde{\varphi}(\eta)}{\tilde{r}(\eta)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}}=\text{const}. \quad (11)$$

Поделив уравнение (11) на уравнения (10) получим

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\text{const};\quad \tilde{\varphi}(\eta)=\text{const}.$$

Отсюда следует, что одновременное выполнение уравнений (10) и (11) возможно только в случае

$$(12)\tilde{\varphi}(\xi)=\text{const};\quad \tilde{\varphi}(\eta)=\text{const}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\left(\tilde{r}(\xi)\tilde{r}(\eta)\right)=0. \quad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой канонический вид уравнения поперечных колебаний:

$$\frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 r(s,t)}{\partial s^2}.$$

Уравнение (12) можно записать в виде:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}=\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta}=0,$$

или

$$\tilde{\varphi}(\eta)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\xi)}{\partial\xi}=\tilde{\varphi}(\xi)\frac{\partial\tilde{\varphi}(\eta)}{\partial\eta},$$

или

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta)}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0.$$

Если вернуться к переменным s и t, получим

$$\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial t}=\pm a\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}. \quad (14)$$

Допустим, $\varphi(s, t)$ представима в виде произведения $\tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(t)$. Тогда можно записать:

$$\frac{\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(t)}{\partial t}}{\tilde{\varphi}(t)}=\pm a\frac{\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(s)}{\partial s}}{\tilde{\varphi}(s)},$$

или

$$\frac{\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(t)}{\partial t}}{\tilde{\varphi}(t)}=\lambda=\text{const};\quad \frac{\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(s)}{\partial s}}{\tilde{\varphi}(s)}=a\lambda=\text{const}.$$

Общим решением уравнения $\frac{\partial\tilde{\varphi}(t)}{\partial t}-\lambda\tilde{\varphi}(t)=0$ является функция $\tilde{\varphi}(t)=C_1e^{\lambda t}$, а решением уравнения $\frac{\partial\tilde{\varphi}(s)}{\partial s}-\frac{\lambda}{a}\tilde{\varphi}(s)=0$ — функция $\tilde{\varphi}(s)=C_1e^{\frac{\lambda}{a}s}$.

Кроме того, это уравнение должно удовлетворять граничным условиям, которое в случае закрепленных концов сформулируем в виде:

$$\tilde{\varphi}(0)-\tilde{\varphi}(l)=\alpha,$$

где α — угол закручивания, а точнее, угол отклонения плоскости колебания на одном конце относительно другого. Таким образом, плоскость колебания может иметь не только плоскую форму, но и форму, описываемую уравнениями

$$\varphi(s,t)=\tilde{\varphi}(s)\tilde{\varphi}(t)=C_1e^{\lambda t}e^{\frac{\lambda}{a}s}. \quad (15)$$

Плоскость колебания может быть и положительной, и отрицательной. Это значит, что она может вращаться как с ускорением, так и с замедлением. Постоянная C в уравнении (15) определяется из начальных и граничных условий.

Кроме того, уравнение (15) содержит и решение задачи равномерного вращения нити с постоянной угловой скоростью ω, например: $\varphi = \omega t + (\omega / a)s$.

В качестве иллюстрации покажем форму нити при ее равномерном вращении вокруг закрепленных концов — это движение характерно при движении детских прыгалок и струн музыкальных

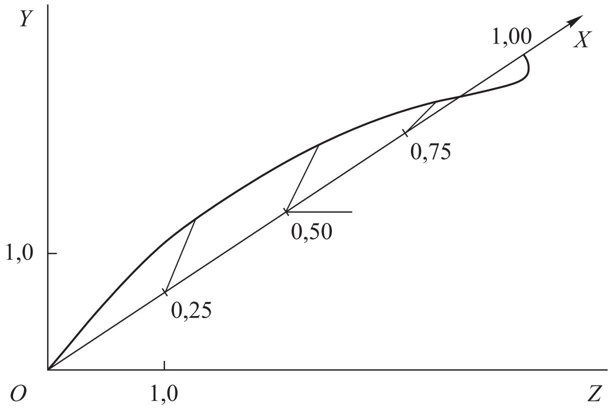

Рис. 2. Пространственная форма нити
Fig. 2. Spatial shape of the thread

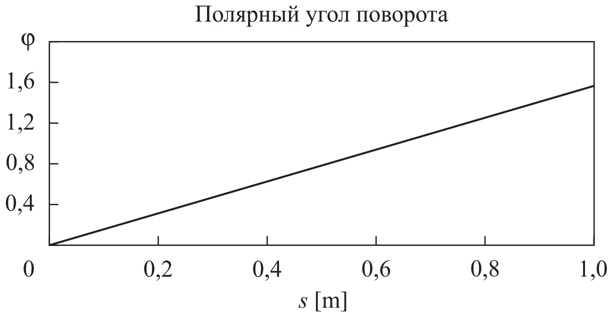

Рис. 3. Форма колебания нити
Fig. 3. The shape of the thread oscillation

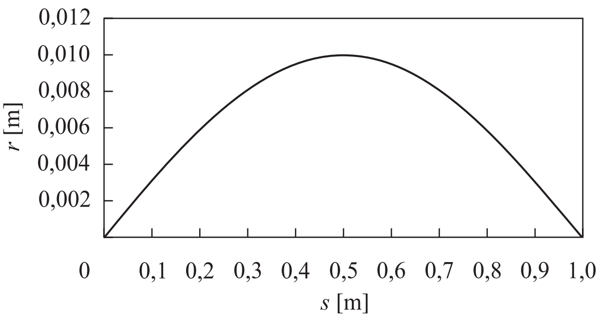

Рис. 4. Отклонение нити
Fig. 4. Deflection of the thread

инструментов. Расчеты проведены для следующих исходных данных:

$$E = 2 \cdot 10^{11}\ \text{Н/м}^2;\ \rho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3.$$

Диаметр нити d = 0,25 мм; длина нити l = 1 м. Скорость распространения поперечной волны 428,85 м/с. Пространственная форма нити и изменение полярных координат по длине нити показаны соответственно на рис. 2–4.

Выводы

Малые пространственные колебания нити, кроме общепризнанного разложения по осям [10–12], могут быть удобно записаны в цилиндрических координатах, где движение каждой точки нити описывается величиной отклонения и полярным углом, указывающим направление этого отклонения. В ряде случаев форма нити в процессе движения может быть разложена на колебательное движение вдоль некоторой искривленной поверхности, описываемое классическим уравнением плоских малых колебаний, и вращение этой поверхности. Такой подход может быть полезен при решении задач, связанных с динамическими процессами при разворачивании тросовой системы, сматывании нити с катушки и т. п. на космических станциях [13–16].

Список литературы

[1] Baron Rayleigh John William S. The theory of sound. London: Macmillan and Co, 1894, 480 c.

[2] Рэлей Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. В 2 т. / пер. с англ. П.Н. Успенского, С.А. Каменецкого; под ред. С.М. Рытова, К.Ф. Теодорчика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1940. Т. 1. С. 187–257.

[3] Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебаний музыкальных струн // Доклады РАН, 1999. Т. 369. № 4. С. 461–465.

[4] Демьянов Ю.А. Постановка задач взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний // Доклады РАН, 2000. Т. 372. № 6. С. 743–748.

[5] Демьянов Ю.А., Малашин А.А. О взаимосвязи волновых и колебательных процессов в струнах щипковых музыкальных инструментов с манерой игры исполнителя // Доклады РАН, 2002. Т. 387. № 3. С. 333–337.

[6] Демьянов Ю.А., Дементьева Д.В., Малашин А.А. Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах // ПММ, 2003. Т. 67. № 2. С. 273–283.

[7] Демьянов Ю.А., Малашин А.А. Поперечно-продольные волны в струне щипкового инструмента при воздействии исполнителя // ПММ, 2003. Т. 67. № 3. С. 464–471.

[8] Демьянов Ю.А., Малашин А.А. К решению проблемы удара твердым телом по гибкой деформируемой струне при возникновении деформации сжатия // Доклады РАН, 2007. № 413. № 5. С. 635–639.

[9] Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A. Relation of wave and vibration processes in the strings of pizzicato musical instruments with the playing style of a performer // Doklady Physics, 2002. T. 47. № 11. C. 828–832.

[10] Брюквина О.Ю., Лобачев В.И., Малашин А.А. Задача о размотке нити с грузом // Вестник МГУЛ, 2012. Т. 6. № 89. С. 4–8.

[11] Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. Распределение энергии между продольными и поперечными движениями гибкой деформируемой нити // Вестник МГУЛ — Лесной вестник, 2008, № 2, С. 141–143.

[12] Малашин А.А. Вынужденные продольные колебания гибких деформируемых предварительно натянутых струн на частотах поперечных колебаний // Доклады РАН, 2007. Т. 416. № 1. С. 54–56.

[13] Смирнов Н.Н., Звягин А.В., Малашин А.А. Динамические процессы при разворачивании тросовой системы во время полета КА «Фотон М-3» // Упругость и неупругость / ред. Д.В. Георгиевский. Москва: МГУ, 2011. С. 454–457.
[14] Демьянов Ю.А., Звягин А.В., Куксенко Б.В., Лужин А.А., Малашин А.А., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. Инерционное сматывание нити с катушки, установленной на искусственном спутнике Земли // Сб.: Динамика деформируемых сред (памяти акад. Е.И. Шемякина), 2010, С. 65–78. URL: http://math.msu.su/department/volnogaz/contents1.htm
[15] Malashin A.A., Smirnov N.N., Bryukvina O.Y., D'yakov P.A. Dynamic control of the space tethered system // J. Sound and Vibration, 2017, v. 389, pp. 41–51. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.11.026
[16] Домрачев В.Г., Комаров Е.Г., Полещук О.М. Мониторинг функционирования объектов на основе нечеткого описания их состояний // Информационные технологии, 2007. № 11. С. 46–52.

Сведения об авторах

Брюквин Александр Владимирович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), bryukvin_a@mail.ru

Брюквина Ольга Юрьевна — старший преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), bryukvina_o@mail.ru

Принята к публикации 07.11.2017.
Поступила в редакцию 09.02.2018.

ABOUT SOLUTION OF THE EQUATIONS OF SMALL SPATIAL OSCILLATIONS OF FLEXIBLE STRING IN CYLINDRICAL COORDINATES

A.B. Bryukvin, O.Yu. Bryukvina

BMSTU (Mytishchi branch), 1st. Institutskaya st., Mytischi, Moscow reg., 141005, Russia

bryukvin_a@mail.ru

In many technical problems flexible threads are used. Consideration of the vibrations of flexible bonds and threads is devoted to a large number of works, most often considering the plane case of transverse oscillations, the interrelation of oscillations in various planes in the spatial case is not sufficiently analyzed. At the same time, experiments with strings of musical instruments, threads in textile production and space cable systems show that most often the oscillations have a complex spatial character, not a flat one. There is no single-valued method for calculating the motion of a flexible thread, especially in the case of spatial motion. In this paper we consider a small spatial transverse motion of a flexible deformable yarn, which includes a well-studied vibration motion that can be represented as a decomposition into shapes by harmonic functions and the rotational motion of thread elements around the axis passing through the fixing points, and a combination of these movements. For a more descriptive description of the rotational motion, cylindrical coordinates are chosen. Using the equations of small transverse oscillations of the filament in two perpendicular planes of the Cartesian coordinate system, by replacing variables, equations are obtained, explicitly indicating the amount of deflection of the filament element from the rectilinear initial position and the direction of this deviation, described by the angle. These equations allow us to analyze not only the displacement of the thread element, but also the rotation of the oscillation plane around the initial static position. As a result of the solution, an estimate of the spatial shape of the string written in cylindrical coordinates is obtained. It is shown that the motion of a string in general form consists of deviation of points described by the well-known equation of plane oscillations and their rotation around an axis passing through the points of boundary fixing. It is shown that the shape of the oscillations can differ from the plane one and represent a line the shape of which is determined by the boundary and initial conditions.
Keywords: flexible string, transverse oscillations

Suggested citation: Bryukvin A.B., Bryukvina O.Yu. *O reshenii uravneniy malykh prostranstvennykh kolebaniy rastyanutoy niti v tsilindricheskikh koordinatakh* [About solution of the equations of small spatial oscillations of flexible string in cylindrical coordinates]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 134–139. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-134-139

References

[1] Baron Rayleigh John William S. The theory of sound. London: Macmillan and Co, 1894, 480 p.
[2] Rayleigh John William S. *Teoriya zvuka* [Theory of sound]. In 2 v. Trans. from English by P.N. Uspenskiy, S.A. Kamenetskiy; ed. S.M. Rytov, K.F. Teodorchik. Moscow; Leningrad: Gostekhteoretizdat, 1940, v. 1, pp. 187–257.
[3] Dem'yanov Yu.A. *K utochneniyu teorii kolebaniy muzykal'nykh strun* [Towards a refinement of the theory of oscillations of musical strings]. Doklady RAN, 1999, v. 369, no. 4. pp. 461–465.

[4] Dem'yanov Yu.A. *Postanovka zadach vzaimodeystviya struny s vozbuditelem ee kolebaniy* [Statement of problems of interaction of a string with the driver of its oscillations]. Doklady RAN, 2000, v. 372, no. 6, pp. 743–748.
[5] Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A. *O vzaimosvyazi volnovykh i kolebatel'nykh protsessov v strunakh shchipkovykh muzykal'nykh instrumentov s maneroy igry ispolnitelya* [About interrelation of wave and oscillatory processes in strings of plucked musical instruments with a manner of playing the performer]. Doklady RAN, 2002, v. 387, no. 3, pp. 333–337.
[6] Dem'yanov Yu.A., Dement'eva D.V., Malashin A.A. *Vzaimovliyanie poperechnykh i prodol'nykh kolebaniy v muzykal'nykh instrumentakh* [Interaction of transverse and longitudinal oscillations in musical instruments]. J. Appl. Math., 2003, v. 67, no. 2, pp. 273–283.
[7] Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A. *Poperechno-prodol'nye volny v strune shchipkovogo instrumenta pri vozdeystvii ispolnitelya* [Transverse-longitudinal waves in a string of a plucked instrument under the influence of a performer]. J. Appl., Math., 2003, v. 67, no. 3, pp. 464–471.
[8] Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A. *K resheniyu problemy udara tverdym telom po gibkoy deformiruemoy strune pri vozniknovenii deformatsii szhatiya* [To the solution of the problem of impact by a rigid body on a flexible deformable string in the event of deformation of compression]. Doklady RAN, 2007, v. 413, no. 5, pp. 635–639.
[9] Dem'yanov Yu.A., Malashin A.A. *Relation of wave and vibration processes in the strings of pizzicato musical instruments with the playing style of a performer* [Relation of the wave and vibration processes in the strings of pizzicato musical instruments with the playing style of a performer]. Doklady Physics, 2002, v. 47, no. 11, pp. 828–832.
[10] Bryukvina O.Yu., Lobachev V.I., Malashin A.A. *Zadacha o razmotke niti s gruzom* [The problem of unwinding the filament with a load]. Moscow State Forest University Bulletin — Lesnoy vestnik, 2012, v. 6, no. 89, pp. 4–8.
[11] Bryukvin A.V., Bryukvina O.Yu. *Raspredelenie energii mezhdu prodol'nymi i poperechnymi dvizheniyami gibkoy deformiruemoy niti* [Energy distribution between longitudinal and transverse motions of a flexible deformable thread]. Moscow State Forest University Bulletin — Lesnoy vestnik, 2008, no. 2, pp. 141–143.
[12] Malashin A.A. *Vynuzhdennye prodol'nye kolebaniya gibkikh deformiruemykh predvaritel'no natyanutykh strun na chastotakh poperechnykh kolebaniy* [Forced longitudinal oscillations of flexible deformed pre-tensioned strings at transverse oscillation frequencies]. Doklady RAN, 2007, v. 416, no. 1, pp. 54–56.
[13] Smirnov N.N., Zvyagin A.V., Malashin A.A. *Dinamicheskie protsessy pri razvorachivanii trosovoy sistemy vo vremya poleta KA «Foton M-3»* [Dynamic processes in the unfolding of the cable system during the flight of spacecraft Foton M-3]. Uprugost' i neuprugost' [Elasticity and non-elasticity]. Ed. D.V. Georgievskiy. Moscow: MSU, 2011, pp. 454–457.
[14] Dem'yanov Yu.A., Zvyagin A.V., Kuksenko B.V., Luzhin A.A., Malashin A.A., Nikitin V.F., Smirnov N.N. *Inertsionnoe smatyvanie niti s katushki, ustanovlennoy na iskusstvennom sputnike Zemli* [Inertial winding of a thread from a coil mounted on an artificial Earth satellite]. [Dynamics of deformable media (memory of academician E.I. Shemyakin)]. 2010, pp. 65–78. Availabe at: http://math.msu.su/department/volnogaz/contents1.htm
[15] Malashin A.A., Smirnov N.N., Bryukvina O.Y., D'akov P.A. Dynamic control of the space tethered system. J. Sound and Vibration, 2017, v. 389, pp. 41–51. DOI 10.1016/j.jsv.2016.11.026
[16] Domrachev V.G., Komarov E.G., Poleshchuk O.M. *Monitoring funktsionirovaniya ob'ektov na osnove nechetkogo opisaniya ikh sostoyaniy* [Monitoring of the functioning of objects based on a fuzzy description of their states] Information Technologies, 2007, no. 11, pp. 46–52.

Authors' information

Bryukvin Aleksandr Vladimirovich — Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), bryukvin_a@mail.ru

Bryukvina Ol'ga Yur'evna — Senior Lecturer of BMSTU (Mytishchi branch), bryukvina_o@mail.ru

Received 07.11.2017.

Accepted for publication 09.02.2018.