ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 1. С. 112–115. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018



УДК 517.512 DOI: 10.18698/2542-1468-2018-1-112-115

# К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНО РАВНОСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ

**Н.В. Шипов**

МГТУ им. Н.Э.Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

nvshi@mail.ru

Согласно теореме Штейнгауза о равномерно равносходящихся рядах Фурье, разность частичных сумм $S_n(\lambda f) - \lambda(x)\, S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$ для любой суммируемой функции $f(x)$ и функции $\lambda(x)$, удовлетворяющей условию Липшица первого порядка. В настоящей работе доказано, что эта теорема остается справедливой, если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_P$ $(1 \le p < \infty)$, а функция $\lambda(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$ $(1/p < \alpha \le 1)$. Полученные результаты могут быть использованы при изучении условий сходимости рядов Фурье в фиксированной точке, а также при изучении условий равномерной или абсолютной сходимости этих рядов. Обобщенный вариант теоремы Штейнгауза расширяет класс функций $\lambda(x)$, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha$, на которые можно умножать частичную сумму $S_n(f)$ ряда Фурье функции $f(x)$ для изучения множества точек сходимости или расходимости (равномерной сходимости или расходимости) частичных сумм $S_n(\lambda f)$ функции $\lambda(x)\, f(x)$ при $n \to \infty$. То же справедливо и применительно к функции $|f(x)|$ при изучении множества точек абсолютной сходимости или абсолютной расходимости ряда Фурье, а также равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье.

**Ключевые слова:** теорема Штейнгауза, равномерно равносходящиеся ряды Фурье, интегральный модуль непрерывности порядка $p$

**Ссылка для цитирования:** Шипов Н.В. К вопросу о равномерно равносходящихся рядах Фурье // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2018. Т. 22. № 1. С. 112–115. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-1-112-115

Ряды Фурье и интеграл Фурье находят разнообразное применение как в математическом анализе [1–5], так и в многочисленных задачах математической физики и их приложениях, включая обобщенные функции [6–8]. Пусть для суммируемой (интегрируемой по Лебегу) периодической функции $f(x)$ установлены условия поточечной сходимости (равномерной или абсолютной сходимости, расходимости) ряда Фурье $\sigma(f)$, вычислены скорости убывания коэффициентов ряда Фурье и связанные с ними оценки интегральных модулей непрерывности [9, 10]. Аналогичные проблемы и задачи, связанные с условиями поточечной сходимости (равномерной или абсолютной сходимости, расходимости) ряда Фурье мы имеем после умножения функции $f(x)$ на периодическую функцию $\lambda(x)$ в зависимости от свойств периодической функции $\lambda(x)$.

## Цель работы

При решении указанных задач оказывается полезной теорема Штейнгауза, в которой утверждается, что если $\lambda(x)$ есть периодическая функция с периодом $2\pi$, удовлетворяющая условию Липшица порядка 1, то ряд Фурье $\sigma(\lambda f)$ и ряд $\lambda(x)\sigma(f)$ являются на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно равносходящимися [1]. Таким образом, разность частичных сумм $S_n(\lambda f) - \lambda(x)S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\sigma(f)$ сходятся или расходятся на одинаковых множествах точек $x$. Поскольку множество точек сходимости (абсолютной сходимости или расходимости применительно к функции $|f(x)|$) ряда $\lambda(x)\, \sigma(|f|)$ установить значительно проще (как и другие свойства этого ряда), то, согласно теореме Штейнгауза, это множество точек сходимости (абсолютной сходимости или расходимости применительно к функции $|f(x)|$) переносится и на ряд Фурье $\sigma(\lambda|f|)$.

## Методы решения

Сформулируем вариант обобщения теоремы Штейнгауза, ослабляя ограничения на функцию $\lambda(x)$ и одновременно усиливая требования к функции $f(x)$.

Теорема 1.

Если периодическая функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_P(1 \le p < \infty)$, а периодическая функция $\lambda(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$ $(1/p < \alpha \le 1)$, $|\lambda(x + t) - \lambda(x)| < Mt^{\alpha}$, где константа $M$ не зависит от $x$, то ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\, \sigma(f)$ являются на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно равносходящимися.

Поскольку функция $f(x + t)$ суммируема по аргументу $t$, а функция $\lambda(x + t)$ непрерывна, то функция $f(x + t)\lambda(x + t)$ суммируема. Поэтому аналогично [1, 3, 5, 6] для разности частичных сумм имеем

$$S_n(\lambda f) - \lambda(x)S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)g_x(t)\sin \pi t\, dt + 0, \quad (1)$$

где

$$g_x(t) = (\lambda(x + t) - \lambda(x))/t, \quad (2)$$

$$|g_x(t)| < Mt^{\alpha - 1}. \quad (3)$$

Чтобы убедиться в том, что правая часть формулы (1) равномерно стремится к нулю, достаточно установить, что стоящий в правой части формулы (1) интеграл по переменной $t$ равномерно стремится к нулю. С учетом периодичности функции под знаком интеграла в формуле (1) аналогично [1–3, 5, 6] имеем

$$|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)gx(t)\sin \pi t\, dt| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\pi/n)g_x(t+\pi/n) - f(x+t)g_x(t)|dt \le \tag{4}$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\pi/n) - f(x+t)||g_x(t+\pi/n)|dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)||g_x(t+\pi/n) - g_x(t)|dt.$$

Первый интеграл в формуле (4) оценивается с помощью неравенства Гельдера и с учетом периодичности функций не превосходит следующей величины:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+\pi/n) - f(x+t)||g_x(t+\pi/n)|dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+\pi/n) - f(t)|^P\, dt\right)^{1/P} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_x(t)|^q\, dt\right)^{1/q} \le$$

$$\le \omega_P(\pi/n, f)M\left(\int_{-\pi}^{\pi} |t|^{(\alpha-1)q} dt\right)^{1/q} =$$

$$= 2\omega_P(\pi/n, f)M\pi^{\alpha-1+1/q}/(\alpha q - q + 1)^{1/q},$$

где $\omega_P(\delta, f)$ — интегральный модуль непрерывности порядка $p$ функции $f(x)$ [1, 2, 8, 10], стремящийся к нулю при $\delta \to 0$ (т. е. при $n \to \infty$ ), а условие $\alpha q - q + 1 > 0$, т. е. $\alpha > 1 - 1/q = 1/p$, выражает требование конечности второго интеграла (несобственного) в неравенстве Гельдера.

Для оценки второго интеграла в формуле (4) используем тот факт, что пространство измеримых и ограниченных функций плотно в пространстве $L_P$ [4]. Поэтому мы можем разложить функцию $f(x)$, принадлежащую на интервале $(-\pi, \pi)$ пространству $L_P(-\pi, \pi)$, на сумму двух функций: $f_1(x)$ и $f_2(x)$, первая из которых измерима и ограничена, $|f_1(x)| \le K$, а вторая функция ($f_2(x)$) принадлежит пространству $L_P(-\pi, \pi)$ и для нее на указанном интервале $(-\pi, \pi)$ выполняется равенство

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x)|^P dx\right)^{1/P} < \varepsilon.$$

Далее продолжим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ периодически с периодом $2\pi$, сохраняя для них те же обозначения. Тогда второй интеграл в формуле (4) с учетом неравенства Гёльдера и при последующем применении неравенства Минковского не превосходит суммы пяти слагаемых:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)||g_x(t+\pi/n) - g_x(t)|dt \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)|^P dt\right)^{1/P} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_x(t+\pi/n) - g_x(t)|^q dt\right)^{1/q} + \tag{5}$$

$$+ K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_x(t)|dt + K\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g_x(t+\pi/n)|dt +$$

$$+ K\int_{-\pi}^{-\varepsilon} |g_x(t+\pi/n) - g_x(t)|dt + K\int_{\varepsilon}^{\pi} |g_x(t+\pi/n) - g_x(t)|dt.$$

Для первого слагаемого в формуле (5), используя установленное выше ограничение на функцию $f_2(x)$, а также учитывая периодичность функции $g_x(t)$, при использовании неравенства Минковского аналогично вышеизложенному получаем не зависящую от $x$ оценку

$$4M\varepsilon\pi^{\alpha-1+1/q}/(\alpha q - q + 1)^{1/q}.$$

Второе слагаемое в формуле (5) с учетом неравенства (3) не превосходит величины $2MK\varepsilon^\alpha/\alpha$. Третье слагаемое в формуле (5) сводится к интегрированию $|g_x(t)|$ по интервалу $(-\varepsilon + \pi/n, \varepsilon + \pi/n)$. Поэтому при $\pi/n < \varepsilon/2$ оно не превосходит величины $2MK(2\varepsilon)^\alpha/\alpha$.

Для оценки четвертого слагаемого в формуле (5) используем равномерную непрерывность функции $g_x(t)$ на замкнутом множестве $-\pi \le x \le \pi$, $-\pi \le t \le -\varepsilon/2$. Для любого $\eta > 0$ существует такое не зависящее от $x$ целое число $N(\varepsilon, \eta)$, что при $n > N(\varepsilon, \eta)$ справедливо неравенство

$$|g_x(t+\pi/n) - gx(t)| < \eta. \tag{6}$$

Интегрирование по переменной $t$ по отрезку $-\pi \le t \le -\varepsilon$ не будет выводить аргумент $t + \pi/n$ при достаточно больших $n$ из отрезка $[-\pi, -\varepsilon/2]$, где выполняется неравенство (6). Выберем $n$ из условия

$$\pi/n < \varepsilon/2. \tag{7}$$

Тогда выполняется неравенство

$$t + \pi/n \le -\varepsilon + \pi/n < -\varepsilon/2.$$

Проинтегрировав неравенство (6) по отрезку $-\pi \le t \le -\varepsilon$, приходим к выводу, что четвертое слагаемое в формуле (5) не превосходит $\pi K\eta$ при

$n > N(\varepsilon, \eta)$ с одновременным выполнением ограничения (7) на $n$.

Аналогичным образом при оценке пятого слагаемого в формуле (5) используем равномерную непрерывность функции $g_x(t)$ на замкнутом множестве $-\pi \le x \le \pi$, $\varepsilon \le t \le \pi + \varepsilon/2$, так как пятое слагаемое в (5) также не превосходит величины $\pi K\eta$.

## Результаты и обсуждение

Итак, поскольку $\varepsilon$ и $\eta$ являются произвольными как угодно малыми положительными числами, существует такое не зависящее от $x$ число $N$, наибольшее из всех, указывавшихся при вычислении оценок интегралов в формуле (4), что при $n > N$ оба интеграла в (4) оказываются ограниченными сверху положительными величинами, пропорциональными $\varepsilon$ или $\eta$ либо стремящимися к нулю при $\varepsilon \to 0$ и к тому же не зависящими от $x$. Таким образом, оцениваемый интеграл в формуле (1):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g_x(t)\sin \pi t\, \mathrm{d}t,$$

а вмести с ним и разность частичных сумм $S_n(\lambda f) - \lambda(x)S_n(f)$ равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. ряды $\sigma(\lambda f)$ и $\lambda(x)\sigma(f)$ сходятся или расходятся на одинаковых множествах точек $x$. Завершено доказательство данного варианта обобщения теоремы Штейнгауза о равномерно равносходящихся рядах Фурье при $\alpha > 1/p$ и $p > 1$.

## Выводы

Полученный результат расширяет класс функций $\lambda(x)$, удовлетворяющих условию Липшица порядка $\alpha$, на которые можно умножать частичную сумму $S_n(f)$ ряда Фурье функции $f(x)$ для изучения множества точек сходимости или расходимости (равномерной сходимости или расходимости) частичных сумм $S_n(\lambda f)$ функции $\lambda(x)f(x)$ при $n \to \infty$. То же справедливо и применительно к функции $|f(x)|$ при изучении множества точек абсолютной сходимости или абсолютной расходимости ряда Фурье, а также равномерной и абсолютной сходимости ряда Фурье.

## Список литературы


[1] Bary N.K. Treatise on Trigonometric Series. V. 1. New York: Pergamon Press Publ., 1964. 480 p.

[2] Edwards R.E. Fourier Series. A Modern Introduction. New York: Heidelberg Publ.; Berlin: Springer-Verlag Publ., 1979. 256 p.

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006. 542 с.

[4] Натансон И.П. Теория функций действительной переменной. М.: Гостехиздат, 1957. 552 с.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1970. 656 с.

[6] Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1973. 391 с.

[7] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

[8] Шипов Н.В. О свойствах функционала $P(1/x)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста // Вестник МГУЛ – Лесной вестник, 2010. Т. 75. Вып. 6. С. 183–185.

[9] Гейт В.Э. О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в $L$ // Изв. вузов. Сер. Математика, 1972. № 7. С. 19–30.

[10] Теляковский С.А. Оценки снизу интегрального модуля непрерывности функции через ее коэффициенты Фурье // Матем. заметки, 1992. № 5. С. 107–112.


## Сведения об авторах


**Шипов Николай Викторович** — канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), nvshi@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru



Статья поступила в редакцию 06.11.2017.

# ABOUT EVENLY EQUICONVERGED FOURIER SERIES

**N.V. Shipov**

BMSTU (Mytishchi branch), 1 st. Institutskaya, 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia

nvshi@mail.ru

Steinhaus theorem about evenly equiconverged Fourier series argues that the difference between the partial sums $S_n(\lambda f) - \lambda(x)\, S_n(f)$ evenly tends to zero when $n \to \infty$ for any summable function $f(x)$ and the function $\lambda(x)$ which satisfies the Lipchitz conditions of first order. In the present work it is proved that this theorem remains fair, if the function $f(x)$ belongs to the LP($1 \le p < \infty$), and the function $\lambda(x)$ satisfies the Lipchitz condition of order $\alpha$ ($1/p < \alpha \le 1$). The results obtained can be used when examining the conditions of convergence of Fourier series in a fixed location, as well as in examining the conditions of uniform or absolute convergence of these series. A generalized version of the theorem of Steinhaus extends functions of $\lambda(x)$ satisfying the Lipchitz condition of order $\alpha$, which can multiply the partial sum of $Sn(f)$ Fourier series of function $f(x)$ to explore the many points of convergence or divergence (evenly convergence or divergence) partial sums $Sn(\lambda f)$ of function $\lambda(x)f(x)$ when $n \to \infty$. The same is true with respect to functions $|f(x)|$ when studying a set of points of absolute convergence or absolute divergence of Fourier series, as well as uniform and absolute convergence of Fourier series.
**Keywords:** Steinhaus theorem, evenly equiconverged Fourier series, the integral modulus of continuity of order *p*

**Suggested citation:** Shipov N.V. *K voprosu o ravnomerno ravnoskhodyashchikhsya ryadakh Fur'e* [About evenly equiconverged Fourier series]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 112–115.
DOI: 10.18698/2542-1468-2018-1-112-115

## References

[1] Bary N.K. Treatise on Trigonometric Series. V. 1. New York: Pergamon Press Publ., 1964, 480 p.
[2] Edwards R.E. Fourier Series. A Modern Introduction. New York: Heidelberg Publ.; Berlin: Springer-Verlag Publ., 1979, 256 p.
[3] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 2004, 542 p.
[4] Natanson I.P. *Teoriya funktsiy deystvitel'noy peremennoy* [Theory of functions of the valid variable]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1957, 552 p.
[5] Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. V 3 t. T. 3.* [Course of differential and integral calculus. In 3 v. V. 3. Moscow: Nauka Publ., 1970, 656 p.
[6] Nikol'skiy S.M. *Kurs matematicheskogo analiza. V 2 t. T. 2.* [Course of the mathematical analysis. In 2 v. V. 2. Moscow: Nauka Publ., 1973, 391 p.
[7] Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 318 p.
[8] Shipov N.V. *O svoystvakh funktsionala P(1/x) v prostranstve obobshchennykh funktsiy medlennogo rosta* [About properties of functionality of $P(1/x)$ in space of the generalized functions of slow growth]. Moscow State Forest University Bulletin — Lesnoy vestnik, 2010, v. 75, no. 6, pp. 183–185.
[9] Geyt V.E. *O strukturnykh i konstruktivnykh svoystvakh funktsii i ee sopryazhennoy v L* [On the structural and constructional features of the function and its conjugate in *L*]. Proceedings of High Schools. Ser. Mathematics, 1972, no. 7, pp. 19–30.
[10] Telyakovskiy S.A. *Otsenki snizu integral'nogo modulya nepreryvnosti funktsii cherez ee koeffitsienty Fur'e* [Evaluate at the bottom of the integral continuity module of functions through its Fourier coefficients]. Matematicheskie zametki [Mathematical notes], 1992, no. 5, pp. 107–112.

## Author's information

**Shipov Nikolay Viktorovich** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), nvshi@mail.ru, caf-math@mgul.ac.ru

Received 06.11.2017.