ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 6. С. 101–108. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

УДК 519.7 DOI: 10.18698/2542-1468-2017-6-101-108

О СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РОСТА И КОЭФФИЦИЕНТОВ ВОЗРАСТАНИЯ

А.В. Бурделёв

Функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$, для которой существует линейная форма $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, $x_i \in \{0,1,\ldots,k\}$, с вещественными коэффициентами и набор вещественных порогов $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$ таких, что для всех $i \in \overline{0,k-1}$ выполняется условие $f(x_1,\ldots,x_n) = i \Leftrightarrow b_i \le L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1}$, называется пороговой k-значной функцией. Для пороговой k-значной функции коэффициентом роста по переменной называется величина $\Delta_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \big(f(x_1,\ldots,x_{i-1},k-1,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\big)$ коэффициентом возрастания по переменной называется величина $\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{k-2}\sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \big(f(x_1,\ldots,x_{i-1},\varepsilon,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},l,x_{i+1},\ldots,x_n)\big)$. Установлен ряд свойств коэффициентов. В частности, установлена связь между коэффициентами роста и мультипликативными коэффициентами: $\lambda_i = 2\xi_i - (k-1)\|f\|$, где $\xi_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^n} x_i f(x_1,\ldots,x_n)$ — мультипликативный коэффициент; $\|f\|$ — сумма значений функции f по всем переменным (вес функции). Показано, что коэффициенты роста являются аналогом параметров Чоу в k-значном случае. Исследована возможность прямой характеризации пороговой k-значной функции коэффициентами роста и возрастания.

Ключевые слова: пороговая функция, коэффициенты роста, коэффициенты возрастания, характеризация пороговой функции

Ссылка для цитирования: Бурделёв А.В. О свойствах коэффициентов роста и коэффициентов возрастания // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 6. С. 101–108. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-6-101-108

В работах [1, 3] представлен новый алгоритм характеризации k-значных пороговых функций. Проблема характеризации булевых пороговых функций подробно рассмотрена в работах [3–5]. Данный алгоритм распространяет на k-значную область подход к характеризации булевых пороговых функций, разработанный М. Дертоузосом в работе [3].

В подходе Дертоузоса для первичной аппроксимации коэффициентов линейной формы пороговой булевой функции используются коэффициенты характеристического вектора, а далее осуществляется пошаговая модификация (корректировка) данного вектора. Эксперименты, проведенные Дертоузосом для небольших значений n, проиллюстрировали оправданность такого подхода: для части функций коэффициенты характеристического вектора напрямую дают разделяющую плоскость, для оставшейся части требуется сравнительно небольшое количество итераций.

Если в булевом случае наиболее удачным решением является использование коэффициентов характеристического вектора, сводящихся к коэффициентам Чоу, то при переходе в k-значную область выбор меры близости к функциям x_i, $i = \overline{1,n}$ для первичной аппроксимации коэффициентов линейной формы не очевиден.

В работах [1, 2, 6] предложено несколько мер близости k-значной функции $f(x)$ к функциям x_i, $i = \overline{1,n}$: мультипликативные коэффициенты, разностные коэффициенты, квадратичные коэффициенты, коэффициенты роста и коэффициенты возрастания.

Определение 1 [7, 8]. Функция k-значной логики $f(x_1,\ldots,x_n)$, для которой существует линейная форма $L(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, $x_i \in \mathbb{Z}_k$ с вещественными коэффициентами и набор вещественных порогов $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$ таких, что для всех $i \in \overline{0,k-1}$ выполняется условие

$$f(x_1,\ldots,x_n) = i \Leftrightarrow b_i \le L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1},$$

называется пороговой k-значной функцией. Не ограничивая общность определения, можем положить здесь и далее $b_0 = -\infty$ и $b_k = +\infty$.

Замечание. В силу неоднозначности задания пороговой функции будем полагать возможным использование порогов, удовлетворяющих нестрогому неравенству

$$b_0 \le b_1 \le \ldots \le b_k .$$

В случае равенства порогов $b_i = b_{i+1}$ для некоторого $i \in \overline{0,k-1}$, очевидно, функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ не принимает значения i. Также далее будем полагать строгое двустороннее неравенство в определении пороговой k-значной функции:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = i \Leftrightarrow b_i < L(x_1,\ldots,x_n) < b_{i+1}.$$

Этого всегда можно добиться небольшим изменением соответствующего порога или весов.

Определение 2. Для функции *k*-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ мультипликативным коэффициентом переменной x_i называется величина

$$\xi_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^n} x_i f(x_1, \ldots, x_n);$$

разностным коэффициентом переменной x_i называется величина

$$\eta_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^n} \left|x_i - f(x_1, \ldots, x_n)\right|;$$

квадратичным коэффициентом переменной x_i называется величина

$$\delta_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^n} \left(x_i - f(x_1,\ldots,x_n)\right)^2.$$

Определение 3. Для функции *k*-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентом роста по переменной x_i называется величина

$$\Delta_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \big(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, k-1, x_{i+1}, \ldots, x_n) - $$
$$- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big).$$

Определение 4. Для функции *k*-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентом возрастания по переменной x_i называется величина

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{k-2}\sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1} \big(f(x_1, \ldots,$$
$$x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big).$$

Все введенные выше коэффициенты характеризуют меру близости функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и x_i, однако для задачи нахождения аналитического представления *k*-значной пороговой функции они подходят с разной эффективностью. В работах [1, 2, 6] показано, что наиболее удачно эту роль выполняют коэффициенты роста и коэффициенты возрастания. Исследованию свойств этих двух коэффициентов посвящена данная работа.

Свойства коэффициентов роста и возрастания. Аналог параметров Номуры и коэффициентов Чоу в *k*-значном случае

Связь между коэффициентами роста и коэффициентами возрастания. Коэффициенты роста и коэффициенты возрастания при малых значениях *k* имеют очевидную связь между собой.

Теорема 1. При $k = 2$ для всех $i = \overline{1,n}$ коэффициенты роста и возрастания совпадают: $\lambda_i = \Delta_i$.

Доказательство. Подставив в определение 4 значение $k = 2$, получим

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{0}\sum_{\varepsilon=1}^{1} \big(f(x_1, \ldots,$$
$$x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big) =$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \big(f(x_1, \ldots,$$
$$x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- f\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n\big)\big) = \Delta_i.$$

Теорема 2. При $k = 3$ для всех $i = \overline{1,n}$ коэффициенты роста и возрастания связаны соотношением $\lambda_i = 2\Delta_i$.

Доказательство. Для компактности математических выкладок (при фиксированном i) обозначим $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(s)$. Подставив в определение 4 значение $k = 3$ и раскрыв внутренние суммы, получим

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \sum_{l=0}^{1}\sum_{\varepsilon=l+1}^{2} \big(f(x_1, \ldots,$$
$$x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \ldots, x_n) -$$
$$- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, l, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big) =$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} \big(f(1) - f(0) + f(2) -$$
$$- f(0) + f(2) - f(1)\big) =$$
$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}} 2\big(f(2) - f(0)\big) = 2\Delta_i.$$

Коэффициенты роста и возрастания всегда имеют одинаковые знаки, которые совпадают со знаками коэффициентов линейной формы функции для один-монотонных и пороговых функций.

Определение 5. В пространстве $\mathbb{Z}^n$ ортантом называется множество векторов, координаты которых имеют одинаковые знаки.

Теорема 3. Пусть пороговая функция *k*-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, задается линейной формой $L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Обозначим через $\vec{L}$ вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда вектор коэффициентов роста $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ и вектор коэффициентов возрастания $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ лежат в одном ортанте с вектором $\vec{L}$. Иными словами, знаки соответствующих координат у всех трех векторов совпадают.

Доказательство. Согласно работе [8], *k*-значная пороговая функция является полностью монотонной, т. е. для любого $s \le n$, любого подмножества переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$ и любых двух фиксаций переменных $(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_S)$, $(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})=(\delta_1,\ldots,\delta_S)$ соответствующие этим фиксациям подфункции

$$f_\varepsilon = f\left(x_1,\ldots,x_n \mid (x_{i_1},\ldots,x_{i_s})=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_S)\right),$$

$$f_\delta = f\left(x_1,\ldots,x_n \mid (x_{i_1},\ldots,x_{i_s})=(\delta_1,\ldots,\delta_S)\right)$$

удовлетворяют одному из следующих условий: либо $f_\varepsilon \le f_\delta$, либо $f_\varepsilon \ge f_\delta$. Рассмотрим фиксации переменной x_j значениями $x_j = p$ и $x_j = p+1$ для некоторого $p=\overline{0,k-2}$. Для любого значения $p=\overline{0,k-2}$ соотношение между фиксациями f_p и f_{p+1} определяется только соответствующим знаком коэффициента линейной формы a_j: если $a_j>0$, то $f_p \le f_{p+1}$; если $a_j=0$, то $f_p = f_{p+1}$; если $a_j<0$, то $f_p \ge f_{p+1}$.

Тогда слагаемые из определения 3

$$\xi_{KR} \equiv f(x_1,\ldots,x_{j-1},k-1,x_{j+1},\ldots,x_n)- \\ -f(x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)$$

и слагаемые из определения 4

$$\xi_{KV} \equiv \sum_{l=0}^{k-2}\sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1}\left(f(x_1,\ldots,x_{j-1},\varepsilon,x_{j+1},\ldots,x_n)- \\ -f(x_1,\ldots,x_{j-1},l,x_{j+1},\ldots,x_n)\right)$$

имеют одинаковый знак с коэффициентом линейной формы a_j либо равны нулю. Суммы значений ξ_{KR} и ξ_{KV}, соответствующие значениям коэффициента роста Δ_i и коэффициента возрастания λ_i, будут иметь одинаковый знак, и этот знак совпадает со знаком коэффициента линейной формы a_j. В случае когда $a_j=0$, суммы значений ξ_{KR} и ξ_{KV} будут также равны нулю.

Связь между коэффициентами роста и мультипликативными коэффициентами. Сложность вычисления одного коэффициента роста, согласно определению 3, составляет $O(k^{n-1})$ операций. Сложность вычисления одного коэффициента возрастания, согласно определению 4, на два порядка больше и составляет $O(k^{n+1})$ операций. Покажем далее, что можно упростить вычисление коэффициентов возрастания и снизить трудоемкость их нахождения.

Теорема 4. Коэффициенты возрастания и мультипликативные коэффициенты связаны соотношением $\lambda_i = 2\xi_i-(k-1)\|f\|$, где $\|f\|$ — сумма значений функции f по всем переменным (вес функции).

Доказательство. Для компактности математических выкладок (при фиксированном i) обозначим $f(x_1,\ldots,x_{i-1},s,x_{i+1},\ldots,x_n)$ через $f(s)$. Тогда

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1}\left(f(\varepsilon)-f(l)\right).$$

Раскроем средний знак суммы по $l=\overline{0,k-2}$ и вынесем за знак суммирования константы

$$\lambda_i = \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left[\sum_{\varepsilon=1}^{k-1}\left(f(\varepsilon)-f(0)\right)+\sum_{\varepsilon=2}^{k-1}\left(f(\varepsilon)-f(1)\right)+\ldots+\sum_{\varepsilon=k-1}^{k-1}\left(f(\varepsilon)-f(k-2)\right)\right]=$$

$$=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left[\left(\sum_{\varepsilon=1}^{k-1}f(\varepsilon)-(k-1)f(0)\right)+\left(\sum_{\varepsilon=2}^{k-1}f(\varepsilon)-(k-2)f(1)\right)+\ldots+\left(f(k-1)-f(k-2)\right)\right]=$$

$$=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left[\left(\sum_{\varepsilon=1}^{k-1}f(\varepsilon)+\sum_{\varepsilon=2}^{k-1}f(\varepsilon)+\ldots+f(k-1)\right)-(k-1)f(0)-(k-2)f(1)-\ldots-f(k-2)\right]=$$

$$=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\begin{bmatrix}(k-1)f(k-1)+(k-2)f(k-2)+\ldots+2f(2)+f(1)-\\ -(k-1)f(0)-(k-2)f(1)-\ldots-2f(k-3)-f(k-2)\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left[(k-1)f(k-1)-(k-1)f(0)+\sum_{j=1}^{k-2}\left(jf(j)-(k-j-1)f(j)\right)\right]=$$

$$=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left[(k-1)f(k-1)-(k-1)f(0)+\sum_{j=1}^{k-2}(2j+1-k)f(j)\right]=$$

$$= \sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \left[\sum_{j=0}^{k-1} (2j+1-k) f(j) \right] =$$

$$= \left[\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \sum_{j=0}^{k-1} 2jf(j) \right] - \left[\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \sum_{j=0}^{k-1} (k-1) f(j) \right] = 2\xi_i - (k-1)f.$$

Таким образом, коэффициенты возрастания могут быть напрямую вычислены из мультипликативных коэффициентов и веса функции. Следовательно, трудоемкость вычисления одного коэффициента возрастания будет составлять $O(k^n)$ операций.

Аналог параметров Номуры и коэффициентов Чоу в k-значном случае. Прямое соответствие коэффициентов возрастания и мультипликативных коэффициентов позволяет выделить вектор параметров на основе коэффициентов роста, который аналогичен вектору параметров Номуры (аналог коэффициентов Чоу в булевом случае [9, 10]).

Определение 6 [10]. Для k-значной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ параметрами Номуры называется упорядоченный набор весов (c_0, c_1, ..., c_n, n_0, n_1, ..., n_{k-1}), где $c_i = \sum_{x\in\mathbb{Z}_p^n} x_i f(x)$, $i=\overline{1,n}$; $n_j = \left|f^{-1}(j)\right|, j=\overline{0,k-1}$.

Соответствие параметров Номуры и k-значной функции далее будем обозначать $f(x)\to$ (c_0, c_1, ..., c_n, n_0, n_1, ..., n_k).

Теорема 5 (k-значный аналог теорем Чоу) [10]. Если две различные k-значные функции имеют одинаковые параметры Номуры, то они обе непороговые. Если две k-значные функции имеют параметры Номуры, которые отличаются друг от друга только перестановкой коэффициентов c_0, c_1, ..., c_n, и одна из них пороговая, то вторая функция также является пороговой и может быть задана системой пороговых неравенств первой функции с соответствующей перестановкой переменных линейной формы.

Известно [10], что при применении к вектору переменных преобразований однотипности параметры Номуры пороговой k-значной функции изменяются следующим образом.

Теорема 6 [6]. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — k-значная пороговая функция, и $f(x)\to$ (c_0, c_1, ..., c_n, n_0, n_1, ..., n_{k-1}), тогда

$$f\left(\pi(x)\right) \to (\pi(c_0,c_1,\ldots,c_n), n_0,n_1,\ldots,n_{k-1}),$$

$$f\left(\chi_i(x)\right) \to (c_0,\ldots,c_{i-1},(k-1)\times$$

$$\times \sum_{x\in\mathbb{Z}_k^n} f(x) - c_i, c_{i+1},\ldots,c_n,n_0,n_1,\ldots,n_{k-1}),$$

где $\pi(x_1,\ldots,x_n) = \left(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}\right)$, $\pi\in S_n$ — преобразование перестановки переменных; $\chi_i(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{i-1},k-1-x_i,x_{i+1},x_n)$, $i=\overline{1,n}$ — замена знаков логики отдельных переменных с помощью преобразования отрицания Лукашевича.

На основании коэффициентов возрастания можно ввести вектор параметров возрастания и доказать для него аналогичные свойства.

Определение 7 (аналог параметров Номуры и коэффициентов Чоу). Для k-значной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ вектором параметров возрастания называется упорядоченный набор весов $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,n_0,n_1,\ldots,n_{k-1})$, где λ_i — коэффициенты возрастания, $i=\overline{1,n}$, $n_j = \left|f^{-1}(j)\right|$ — вес j-го слоя значений функции, $j=\overline{0,k-1}$.

Соответствие параметров возрастания и k-значной функции далее будем обозначать $f(x)\to(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,n_0,n_1,\ldots,n_k)$.

Теорема 7 (k-значный аналог теорем Чоу). Если две различные функции имеют одинаковые векторы параметров возрастания, то они обе непороговые. Если две функции имеют векторы параметров возрастания, которые отличаются друг от друга только перестановкой коэффициентов $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ и одна из них пороговая, то вторая функция также является пороговой и может быть задана системой пороговых неравенств первой функции с соответствующей перестановкой переменных линейной формы.

Доказательство. Между множеством параметров Номуры и векторов параметров возрастания устанавливается взаимно однозначное соответствие

$$(c_0,c_1,\ldots,c_n,n_0,n_1,\ldots,n_{k-1}) =$$

$$= \left(\frac{\lambda_0 - C}{2}, \frac{\lambda_1 - C}{2}, \ldots, \frac{\lambda_n - C}{2}, n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}\right),$$

где $C = (k-1)\sum_{j=0}^{k-1} n_j$.

Пусть две различные функции имеют одинаковые векторы параметров возрастания, тогда они имеют одинаковые параметры Номуры. Поэтому по теореме 5 они обе не пороговые. Если две функции имеют векторы параметров возрастания, которые отличаются друг от друга только перестановкой коэффициентов $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то они имеют параметры Номуры, которые отличаются друг от друга только перестановкой коэффициентов c_0, c_1, ..., c_n; и если одна из функций пороговая, то вторая функция также является пороговой и может быть задана системой пороговых неравенств первой функции с соответствующей перестановкой переменных линейной формы.

В случае применения к аргументам k-значной пороговой функции преобразований однотипности вектор параметров возрастания изменяется следующим образом.

Теорема 8. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ — k-значная пороговая функция с вектором параметров возрастания $f(x)\to(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n,n_0,n_1,\dots,n_k)$, тогда верны следующие соответствия:

$$f\left(\pi(x)\right)\to\left(\pi(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\right),n_0,n_1,\dots,n_{k-1}),$$

$$f\left(\chi_i(x)\right)\to(\lambda_0,\dots,\lambda_{i-1},2(k-1)\sum_{x\in\mathbb{Z}_k^n} f(x)-\lambda_i,\lambda_{i+1},\dots,c_n,n_0,n_1,\dots,n_{k-1}).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\lambda_i=2\xi_i-(k-1)\|f\|$ и теоремой 6.

Прямая характеризация пороговых *k*-значных функций коэффициентами роста и коэффициентами возрастания

Определение 8. Будем говорить, что линейная форма $L(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n$ дает чистое разделение областей значений пороговой k-значной функции $f(x_1,\dots,x_n)$, принимающей все значения из множества $\mathbb{Z}_k$, если для любого $\alpha=\overline{0,k-2}$ выполняется строгое неравенство

$$\max_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}<$$
$$<\mathop{min}_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha+1}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}.$$

Если это неравенство выполняется, то границы $b_0,b_1,\dots,b_k$ можно определить, например, следующим способом:

$$b_\alpha=\min_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\},\ \ \alpha=\overline{0,k-1},$$

$$b_k=\max_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=k-1}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}+1.$$

В случае когда функция $f(x_1,\dots,x_n)$ не принимает некоторых значений из множества $\overline{0,k-1}$, необходимо следующим образом убрать из рассмотрения соответствующие области значений: пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$ принимает значения $0\le\alpha_0<\alpha_1<\dots<\alpha_t<k,\ 0<t<k$. Тогда для всех $i=\overline{0,t-1}$ необходимо проверить выполнение строгого неравенства

$$\max_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha_i}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}<$$
$$<\min_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha_{i+1}}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}.$$

Пороги в этом случае можно определить, например, следующим образом: 1) для всех значений $\alpha_0,\dots,\alpha_t$ присвоить значения

$$b_{\alpha_i}=\min_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\alpha_i}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\};$$

2) если функция принимает значение $k-1$, то положить

$$b_k=\max_{f(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=k-1}\{a_1\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_n\}+1,$$

в противном случае положить $b_k=+\infty$; для оставшихся значений $j\in\mathbb{Z}_k\setminus\{\alpha_0,\dots,\alpha_t\}$ (которые не являются значениями функции $f(x_1,\dots,x_n)$, начиная со старшего, присвоить соответствующему порогу значение $b_j=b_{j+1}$.

В ряде случаев коэффициенты роста и коэффициенты возрастания напрямую дают уравнение разделяющей плоскости. В работе [11] осуществлена попытка изучения класса пороговых булевых функций, для которых коэффициенты характеристического вектора [3, 11] напрямую дают уравнение разделяющей плоскости. С ростом n доля таких пороговых булевых функций (называемых авторами работы [11] «линейными») среди пороговых булевых функций быстро убывает.

Рассмотрим далее вопрос о том, какая доля пороговых k-значных функций может быть реализована линейной формой, в качестве коэффициентов которой взяты коэффициенты роста или коэффициенты возрастания. Для фиксированных значений k и n введем следующие обозначения:

$\Upsilon_\Delta^{k,n}$ — доля функций, для которых коэффициенты роста напрямую дают уравнение разделяющей плоскости;

$\Upsilon_\lambda^{k,n}$ — доля функций, для которых коэффициенты возрастания напрямую дают уравнение разделяющей плоскости;

$\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$ — доля функций, для которых коэффициенты роста напрямую дают уравнение разделяющей плоскости, а коэффициент возрастания — нет;

$\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$ — доля функций, для которых коэффициенты возрастания напрямую дают уравнение разделяющей плоскости, а коэффициент роста — нет;

$\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$ — доля функций, для которых коэффициенты возрастания и коэффициенты роста одновременно напрямую дают уравнение разделяющей плоскости.

Для введенных обозначений верны следующие равенства:

$$\Upsilon_{\Delta}^{k,n} = \Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n} + \Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n},$$

$$\Upsilon_{\lambda}^{k,n} = \Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n} + \Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}.$$

Чтобы получить экспериментальные данные о доле пороговых k-значных функций, для которых коэффициенты роста или коэффициенты возрастания напрямую дают уравнение разделяющей плоскости, были сгенерированы случайным образом 100 000 пороговых функций для каждого значения n и k. Генерация осуществлялась следующим образом: в интервале (– 5000; 5000) случайным образом выбирались n коэффициентов линейной формы $a_1, \ldots, a_n$; далее в интервале

$$\left((k-1) \sum_{i=1,\, n:\, a_i<0} a_i;\ (k-1) \sum_{i=1,\, n:\, a_i>0} a_i \right)$$

случайным образом выбирались и упорядочивались по возрастанию пороги $b_0, \ldots, b_k$.

В табл. 1 приведены результаты экспериментального вычисления величин $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$ и $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$. В каждой ячейке табл. 1 в столбец записан вектор $\left(\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}, \Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}, \Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}\right)$.

Дальнейшее убывание величин $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$ $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$ $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$ при $n = 2$ показано в табл. 2.

Согласно теореме 2, коэффициенты роста и возрастания совпадают при $k = 2$. Это означает, что доля функций при $k = 2$ будет одинаковой для обоих коэффициентов, т. е.

$$\Upsilon_{\Delta}^{2,n} = \Upsilon_{\lambda}^{2,n} = \Upsilon_{\Delta\lambda}^{2,n},$$

$$\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{2,n} = \Upsilon_{\lambda-\Delta}^{2,n} = 0.$$

Значения величин $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{2,n}$ приведены в табл. 3.

Таблица 1

Экспериментальные значения величин $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$

The experimental values of $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$ $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$

k	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0 1 0	0,1302 0,6720 0,1330	0,1752 0,4891 0,1758	0,2051 0,1915 0,2052	0,1058 0,0380 0,1059	0,0002 0,0329 0,0002	0,0000 0,0095 0,0000	0,0000 0,0049 0,0000
4	0,0854 0,7896 0,0921	0,1589 0,5457 0,1736	0,0474 0,2926 0,0533	0,0193 0,0585 0,0188	—	—	—	—
5	0,0854 0,7896 0,0921	0,0937 0,4483 0,0743	0,0499 0,0953 0,0393	—	—	—	—	—
6	0,1139 0,7521 0,0845	0,1203 0,2783 0,0757	0,0351 0,0335 0,0217	—	—	—	—	—
7	0,1071 0,7146 0,0563	0,1238 0,1734 0,0699	—	—	—	—	—	—
8	0,1514 0,6425 0,0557	0,1210 0,1114 0,0531	—	—	—	—	—	—
9	0,1845 0,5781 0,0607	0,1034 0,0702 0,0352	—	—	—	—	—	—
10	0,2194 0,5228 0,0620	0,0809 0,0456 0,0228	—	—	—	—		—

Таблица 2

Экспериментальные значения величин $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$

The experimental values of $\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$, $\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$ $\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\Upsilon_{\Delta-\lambda}^{k,n}$	0,2510	0,2822	0,2960	0,3088	0,3077	0,3091	0,3030	0,3011	0,2876	0,2786	0,2727
$\Upsilon_{\Delta\lambda}^{k,n}$	0,4741	0,4159	0,3715	0,3330	0,3026	0,2735	0,2567	0,2387	0,2244	0,2104	0,1998
$\Upsilon_{\lambda-\Delta}^{k,n}$	0,0575	0,0525	0,0492	0,0429	0,0404	0,0341	0,0300	0,0248	0,0221	0,0189	0,0167

Т а б л и ц а 3

Экспериментальные значения величин $Y_{\Delta\lambda}^{2,n}$

The experimental values of $Y_{\Delta\lambda}^{2,n}$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$Y_{\Delta\lambda}^{2,n}$	1	1	0,9545	0,7950	0,6685	0,5894	0,4325	0,2806	0,1694	0,1108	0,0782	0,0589	0,0443

Анализ экспериментальных данных табл. 1–3 позволяет сделать следующие выводы:

– доля функций, для которых коэффициенты роста или коэффициенты возрастания напрямую дают уравнение разделяющей плоскости, убывает с ростом значений k и n;

– доля функций, характеризуемых коэффициентами возрастания, больше, чем доля функций, характеризуемых коэффициентами роста, только для малых значений k и n (ячейки выделены более темным цветом). С ростом k и n соотношение меняется на противоположное вплоть до 20-кратного отличия при $k = 17$ и $n = 2$;

– при фиксированном k с ростом n величины $Y_{\Delta-\lambda}^{k,n}$ и $Y_{\lambda-\Delta}^{k,n}$ имеют тенденцию к сближению, что можно объяснить полученными экспериментальными данными, демонстрирующими убывание максимального значения угла между векторами $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ с ростом n. Таким образом, с ростом n повышается вероятность того, что оба вектора либо одновременно оказываются лежащими в области решения, либо одновременно лежат вне этой области.

Выводы

Показана ключевая роль коэффициентов роста и коэффициентов возрастания в решении задачи характеризации пороговых k-значных функций, а также возможность применения данного инструмента для решения других прикладных задач дискретной математики. Выявленные свойства демонстрируют сильную структурную связь между пороговыми k-значными функциями и введенными в работах [1, 2, 4] коэффициентами.

Список литературы

[1] Бурделёв А.В., Никонов В.Г. О новом алгоритме характеризации k-значных пороговых функций // Computational nanotechnology, 2017. Вып. 1. С. 7–14.

[2] Бурделёв А.В., Никонов В.Г. О построении аналитического задания k-значной пороговой функции // Computational nanotechnology, 2015. Вып. 2. С. 2–13.

[3] Дертоузос М. Пороговая логика. М.: Мир, 1967. 343 с.

[4] Минский М., Паперт С. Персептроны. М.: Мир, 1971. 262 с.

[5] Бутаков Е.А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970, 328 с.

[6] Бурделёв А.В., Никонов В.Г., Лапиков И.И. Распознавание параметров узла защиты информации, реализованного пороговой k-значной функцией // Тр. Санкт-Петербургского Института информатики и автоматизации Российской академии наук. 2016. Вып. 46. С. 108–127.

[7] Obradovic Z. Learning with Discrete Multi-Valued Neurons // Machine Learning: Proc. 7th Int. Conf. / ed. B.W. Porter and R.J. Mooney, Austin, TX, Morgan-Kaufmann, 1990. Springer US, 1990, pp. 392–399.

[8] Никонов В.Г., Никонов Н.В. Особенности пороговых представлений k-значных функций // Тр. по дискретной математике, 2008. Т. 11. С. 60–85.

[9] Chow C. On the characterization of threshold functions // In Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design (FOCS), Detroit, Michigan, USA, October 17–20, 1961. Detroit, 1961 pp. 34–38.

[10] Moraga C. Multiple-valued threshold logic // Optical Computing. Digital and Symbolic / ed. R.Arrathoon. New York: Marcel Dekker Inc., 1989, pp. 161–183.

[11] Беляков-Бодин В.И., Розенблит С.И. Исследование некоторых вопросов синтеза пороговых функций. М.: Институт теоретической и экспериментальной физики Гос. комитета по использованию атомной энергии СССР, 1972. 15 с.

Сведения об авторе

Бурделёв Александр Владимирович — старший преподаватель кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, aburd2011@mail.ru

Статья поступила в редакцию 21.08.2017 г.

ABOUT PROPERTIES OF EXPANSION COEFFICIENTS AND INCREASE COEFFICIENTS

A.V. Burdeliov

Belarusian State University, 4, Nezavisimosti avenue, 220030, Minsk, Republic of Belarus

aburd2011@mail.ru

A function of *k*-valued logic $f(x_1,\ldots,x_n)$, for which there exists a linear form, $L(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,\ x_j\in\{0,1,\ldots,k\}$ with real coefficients and a set of real cutoffs $b_0<b_1<\ldots<b_k$ such as that for all $i\in\overline{0,k-1}$ the condition $f(x_1,\ldots,x_n)=i\Leftrightarrow b_i\le L(x_1,\ldots,x_n)<b_{i+1}$, is called a cutoff *k*-valued function. For the cutoff *k*-valued function of expansion the coefficients are defined as

$$\Delta_i=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)}\left(f(x_1,\ldots,x_{i-1},k-1,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)\right).$$

increase coefficients are defined as as

$$\lambda_i=\sum_{(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^{n-1}}\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{\varepsilon=l+1}^{k-1}\left(f(x_1,\ldots,x_{i-1},\varepsilon,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_{i-1},l,x_{i+1},\ldots,x_n)\right).$$

We determine several properties of these coefficients. Especially determined relation between expansion coefficients and multiplication coefficients as below $\lambda_i=2\xi_i-(k-1)\|f\|$, where $\xi_i=\sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_k^n}x_if(x_1,\ldots,x_n)$ — multiplicative factor, $\|f\|$ — sum of all values of function f. We demonstrate that expansion coefficients are analogous of Chow coefficients in k-valued case. We also studied the ability of strict characterization of k-valued cutoff function by expansion coefficients and increase coefficients.

Keywords: learning of cutoff functions, cutoff function, expansion coefficients, increase coefficients

Suggested citation: Burdeliov A.V. *O svoystvakh koeffitsientov rosta i koeffitsientov vozrastaniya* [About properties of expansion coefficientsand increase coefficients]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2017, vol. 21, no. 6, pp. 101–108. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-6-101-108

References

[1] Burdeliov A.V., Nikonov V.G. *O novom algoritme kharakterizatsii k-znachnykh porogovykh funktsiy* [On a new algorithm for characterizing *k*-valued threshold functions] Computational nanotechnology, 2017, v. 1. pp. 7–14.

[2] Burdeliov A.V., Nikonov V.G. *O postroenii analiticheskogo zadaniya k-znachnoy porogovoy funktsii* [On the construction of an analytic assignment of a *k*-valued threshold function] Computational nanotechnology, 2015, v. 2. pp. 2–13.

[3] Dertouzos M. *Porogovaya logika* [Threshold logic]. Moscow: Mir Publ., 1967. 343 p.

[4] Minskiy M., Papert S. *Perseptrony.* [Perceptrons]. Moscow: Mir Publ., 1971. 262 p.

[5] Butakov E.A. *Metody sinteza releynykh ustroystv iz porogovykh elementov* [Methods of synthesis of relay devices from threshold elements]. Moscow: Energia Publ., 1970, 328 p.

[6] Burdeliov A.V., Nikonov V.G., Lapikov I.I. *Raspoznavanie parametrov uzla zashchity informatsii, realizovannogo porogovoy k-znachnoy funktsiey* [Recognition of the parameters of the information security node implemented by the threshold *k*-value function] Proceedings of the St. Petersburg Institute of Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, 2016, v. 46, pp. 108–127.

[7] Obradovic Z. Learning with Discrete Multi-Valued Neurons. Machine Learning: Proc. 7th Int. Conf., ed. B.W. Porter and R.J. Mooney, Austin, TX, Morgan-Kaufmann, 1990. Springer US Publ., 1990, pp. 392–399.

[8] Nikonov V.G., Nikonov N.V. *Osobennosti porogovykh predstavleniy k-znachnykh funktsiy* [Singularities of threshold representations of *k*-valued functions] Proc. on discrete mathematics, 2008, v. 11, pp. 60–85.

[9] Chow C. On the Characterization of Threshold Functions. Proceedings of the Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design (FOCS), Detroit, Michigan, USA, October 17–20, 1961. Detroit, 1961 pp. 34–38.

[10] Moraga C. Multiple-valued threshold logic. Optical Computing. Digital and Symbolic. New York: Marcel Dekker Inc., 1989, pp. 161–183.

[11] Belyakov-Bodin V.I., Rozenblit S.I. *Issledovanie nekotorykh voprosov sinteza porogovykh funktsiy* [Investigation of some problems of synthesis of threshold functions]. Moscow: Institute of Theoretical and Experimental Physics Gos. Committee on the Use of Atomic Energy of the USSR Publ., 1972, 15 p.

Authors' information

Burdeliov Alexandr Vladimirovich — senior lecturer at the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis at the Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University, aburd2011@mail.ru

Received 21.08.2017