ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 2. С. 84–86. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

УДК 534.631 DOI: 10.18698/2542-1468-2017-2-84-86

О НАИБОЛЬШЕМ ПРОДВИЖЕНИИ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ РЕСУРСЕ

А.И. Рубинштейн, П.С. Серебренников, Н.В. Шипов, Т.А. Городецкая

МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Рассматривается следующая задача: на материальную точку действует постоянная по направления, но переменная по величине сила. Эта сила ограничена по модулю. Очевидно, что материальная точка будет двигаться по прямой. Предполагается наличие трения, пропорционального скорости движения материальной точки. Пусть движение происходит неограниченно во времени, так как уже при мгновенном импульсном воздействии скорость положительна бесконечное время и экспоненциально убывает. Допустим, постоянен интеграл от действующей сторонней силы на всем бесконечном промежутке времени движения. Вопрос: на какое максимальное расстояние может переместиться точка с фиксированной массой? Задача сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами в левой части и переменной сторонней силой воздействия в правой части уравнения. Решение этого уравнения (задача Коши с нулевой начальной скоростью) записывается в виде интеграла Дюамеля. Интегрирование этого решения — скорость движения от нуля до бесконечности — дает величину перемещения материальной точки. Оказывается, что это перемещение зависит не от формы закона изменения действующей силы, а только от интеграла от этой силы по бесконечному промежутку времени движения. Удается, таким образом, не прибегать к принципу максимума Понтрягина и обойти трудности, возникающие при его применении. Рассматривается и случай, когда время движения ограничено заранее заданной величиной. Решение в этом случае не столь красиво и может быть сведено к решению стандартной задачи линейного программирования. Принципиально рассмотрен и случай, когда сила трения пропорциональна квадрату скорости, — тогда дифференциальное уравнение движения оказывается уравнением Риккати и аналитическое его решение представляет значительные трудности.

Ключевые слова: оптимальное управление, сила, законы Ньютона

Ссылка для цитирования: Рубинштейн А.И., Серебренников П.С., Шипов Н.В., Городецкая Т.А. О наибольшем продвижении при ограниченном ресурсе // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 2. С. 84–86. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-2-84-86

Реальные технические процессы часто моделируются как управление в задачах, описываемых дифференциальными уравнениями (или системами таких уравнений). Мощным аппаратом решения подобных задач является принцип максимума Л.С. Понтрягина [1]. Однако иногда удается исследовать оптимальное управление более простыми средствами, не прибегая к серьезному аппарату принципа максимума.

Пусть сосредоточенная масса m прямолинейно движется под воздействием переменной по величине, но постоянной по направлению силы $F(t)$, ограниченной как по величине, так и интегрально, т. е.

$$0 \le F(t) \le F_{\max}, \int_0^\infty F(t)\mathrm{d}t = A. \tag{1}$$

Предположим, что на массу воздействует сила трения, пропорциональная скорости движения $v(t)$ массы. Как оптимально выбрать управление $F(t)$, чтобы масса переместилась на возможно большее расстояние?

По второму закону Ньютона (см., например, [2]),

$$m\frac{dv}{dt} = -kv + F(t), \tag{2}$$

где $F(t)$ подчиняется ограничениям (1).

Так как даже при отсутствии управления $F(t)$, т. е. при $F(t) = 0$, решение (2) есть

$$v(t) = v(0)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t},$$

время движения бесконечно (некоторый порок модели торможения с помощью трения). Поэтому в (1) интегрирование до $+\infty$.

Если начальное условие в задаче Коши для уравнения (2) взять в виде $v(0) = 0$, то получим (см., например, [3])

$$v(t) = \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\int_0^t \frac{F(\tau)}{m}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau}\mathrm{d}\tau,$$

откуда

$$S(\infty) = \int_0^\infty v(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\int_0^\infty \frac{F(\tau)}{m}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{F(\tau)}{m}\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau}\int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^\infty F(\tau)\mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau}\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{k}\int_0^\infty F(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{A}{k}. \tag{3}$$

Результат (3) достаточно любопытен — при любом законе воздействия $F(t)$, подчиняющемся ограничениям (1), за бесконечное время материальная точка переместится на расстояние A/k [4–8].

Волевым образом ограничим время движения величиной T, т. е. вместо (1) наложим на $F(t)$ ограничения

$$0 \le F(t) \le F_{\max}, \int_0^T F(t)\mathrm{d}t = A.$$

Тогда получим

$$S(T) = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \int_0^t \frac{F(\tau)}{m} \mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau} \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^T \frac{F(\tau)}{m} \mathrm{e}^{\frac{k}{m}\tau} \int_\tau^T \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_0^T \frac{F(\tau)}{k} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}(T-\tau)}\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (4)$$

В этом случае уже возможна оптимизация по $F(t)$. Замена интеграла в (4) по формуле прямоугольников дает

$$S(T) \approx \frac{T}{kn}\sum_{l=0}^{n-1} F\left(l\frac{T}{n}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\left(T - l\frac{T}{n}\right)}\right), \qquad (5)$$

и максимизация правой части уравнения (5) приведет к стандартной задаче линейного программирования при ограничениях

$$0 \le F(lT/n) \le F_{\max}, \sum_{l=0}^{n-1} F\left(l\frac{T}{n}\right) \le \frac{An}{T}.$$

Без труда можно рассмотреть более общую задачу, где m и k являются функциями $m(t)$ и $k(t)$. Тогда

$$S(\infty) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^t \frac{k(\tau)}{m(\tau)}\mathrm{d}\tau} \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^u \frac{k(\tau)}{m(\tau)}\mathrm{d}\tau} \frac{F(u)}{m(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}t. \qquad (6)$$

Оптимизация (6) по F достаточно стандартна [9, 10].

Вместо линейного уравнения (2) можем получить уравнение Риккати

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 + F(t) \text{ [4]}.$$

Это происходит в случаек огда сила трения пропорциональна квадрату скорости $v^2(t)$.

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 391 с.
[2] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 100 с.
[3] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 276 с.
[4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 576 с.
[5] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 400 с.
[6] Bushaw D.W. Thesis, Department of Math. Princeton Univ., 1952.
[7] La Solie J.P. The Time Optimal Control Problem? Contributions to the Theory on Nonlinear Oscillations. Princeton, 1959.
[8] Фельдбант А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового постраства // Автоматика и телемеханика, 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
[9] Kolmogoroff A. Uber die analitischen methoden in der Warscheinlich-Keitsrechnung // Math. Ann. 1931, no. 104, pp. 415–458.
[10] Auslender A. Methodes et theorems de dualite / Acad. Sci. Paris Ser, A267, 1968, pp. 114–117.

Сведения об авторах

Рубинштейн Александр Иосифович — д-р физ.-мат. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Серебренников Павел Семенович — канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Шипов Николай Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Городецкая Татьяна Александровна — старший преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Статья поступила в редакцию 18.08.2016 г.

THE LARGEST DISTANCE COVERED UNDER A LIMITED RESOURCE

A.I. Rubinshtein, P.S. Serebrennikov, N.V. Shipov, N.A. Gorodetskaya

BMSTU (Mytishchi branch), 1 st. Institutskaya, 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia

rubinshtein_aleksandr@mail.ru

We study the following problem: some material point is under the action of a force which is directionally constant, but, on the other hand, quantitatively variable. This force is limited in absolute magnitude. It is obvious that the material point studied will move in a straight line. It is assumed that the friction available is proportional to the speed of the material point movement. Let the motion be unlimited in time, because even at instantaneous pulse of force the speed is positive for infinite time and decreases exponentially. Let the integral of force over time on all the infinite time span of the movement be constant. Let's ask: what is the maximum distance the point of fixed mass can pass? The problem consists in developing a linear homogeneous differential equation with some constant coefficients in the left part and a variable force in the right part of the equation. The solution of this equation (Cauchy problem with zero initial velocity) is written as a Duhamel integral. The integration of this solution, i.e., the speed of movement from zero to infinity, gives us the distance covered by a material point. It turns out that this movement does not depend on the form of the force change law, and it depends only on the integral of this force along the endless time of movement. Thus, it is possible not to apply the maximum principle of L. S. Pontryagin and to avoid the difficulties encountered in its application. This paper considers also the case when motion is restricted to a predetermined amount of time. The solution in this case is not so beautiful and can be reduced to solving a standard linear programming problem. Basically, the case when the friction force is proportional to the square of the speed has been also considered. In this case, the differential equation of motion turns out to be a Riccati equation and its analytical solution represents a considerable challenge.
Keywords: optimal control, force, Newton's laws.

Suggested citation: Rubinshtein A.I., Serebrennikov P.S., Shipov N.V., Gorodetskaya N.A. *O naibol'shem prodvizhenii pri ogranichennom resurse* [The largest distance covered under a limited resource]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2017, vol. 21, no. 2, pp. 84–86. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-2-84-86

References

[1] Pontryagin L.S. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 391 p. (in Russian)
[2] Filippov A.F. *Sbornik zadach po differencial'nym uravneniyam* [Collection of problems on differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 100 p. (in Russian)
[3] Petrovsky, I.G. *Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravneniy* [Lectures on the theory of ordinary differential equations]. Moscow, 1952, 276 p. (in Russian)
[4] Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam* [Reference Book on ordinary differential equation]. Moscow: Nauka Publ., 1965, 576 p. (in Russian)
[5] Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovanie* [Dynamic programming]. Moscow: IL Publ., 1960, 400 p. (in Russian)
[6] Bushaw D.W. Ph. D. Thesis, Department of Math. Princeton Univ., 1952.
[7] La Solie J.P. The Time Optimal Control Problem? Contributions to the Theory on Nonlinear Oscillations, Princeton, 1959.
[8] Fel'dbant A.A. *O sinteze optimal'nyh sistem s pomoshh'yu fazovogo postrastva* [On the synthesis of optimal systems using the phase postranstve]. Automation and remote control, 16, no. 2, 1955, pp. 129-149. (in Russian)
[9] Kolmogoroff A. Uber die analitischen methoden in der Warscheinlich-Keitsrechnung, Math. Ann. 104, 1931, pp. 415-458.
[10] Auslender A. Methodes et theorems de dualite, Acad. Sci. Paris Ser, A267, 1968, pp. 114-117.

Author's information

Rubinshteyn Aleksandr Iosifovich — Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Prof., BMSTU (Mytishchi branch), e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Serebrennikov Pavel Semenovich — Cand. Sci. (Physico-Mathematical), Assoc. Prof., BMSTU (Mytishchi branch), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Shipov Nikolay Viktorovich — Cand. Sci. (Physico-Mathematical), Assoc. Prof., BMSTU (Mytishchi branch), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Gorodetskaya Tat'yana Aleksandrovna — senior teacher, BMSTU (Mytishchi branch), e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Received 18.08.2016