ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 1. С. 141–144. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

УДК 519.62 DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-141-144

ЧЕМУ МОЖНО И СЛЕДУЕТ УЧИТЬ СТУДЕНТОВ

А.И. Рубинштейн, О.М. Полещук, Т.В. Чернова

МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Студенты с трудом воспранимают математику. Скорее всего, это объясняется ощущением, что математика есть набор неясно откуда появившихся формальных задач, решение которых неясно что дает, но получение которого связано с «эквилибристикой», выдаваемой за «науку». Думается, что стоит предъявить учащимся ряд реальных технических устройств, математические модели функционирования, да и просто идеи их создания, описываемые простыми дифференциальными уравнениями, решение которых по силам аккуратным студентам первого или второго курсах обычных технических вузов (или даже просто нахождение экстремума функции одного переменного). Все дело в использовании некоторых фактов, подмеченных внимательными наблюдателями — физиками. К числу таких фактов относится, например, принцип Ферма: свет (даже в неоднородной среде) распространяется по пути, проходимому за наименьшее время. Поэтому, например, в однородной среде свет распространяется по прямой. Это легко проверить с помощью «потайного» фонаря — коробки с узкой щелью, внутри которой находится источник света (лампа или свеча). Этот факт (принцип Ферма) позволяет получить закон отражения от прямого и изогнутого экрана. Все видели в солнечный день, как блестит, перемещаясь, яркая точка на фасаде многооконного здания (например, гостиницы «Космос» на ВДНХ) когда вы перемещаетесь вдоль него. Это светится стационарная точка. Закон преломления — закон Снеллиуса — получается, если применить принцип Ферма к границе раздела двух сред с различными плотностями (т. е. сред с различными скоростями распространения света). А отсюда и объяснения явления рефракции — мы видим солнечный диск еще около минуты после его ухода за горизонт. Полное внутреннее отражение (следствие закона Снеллиуса) ведет к созданию световода — очень важного изобретения. Прожектор, радиотелескоп, разные типы радиолокационных антенн — все это принцип Ферма. В статье обсуждаются эти и другие случаи изучения достаточно просто исследуемых математических моделей.

Ключевые слова: оптимальный контроль, ньютоновские лучи, кеплеровские лучи, радар

Ссылка для цитирования: Рубинштейн А.И., Полещук О.М., Чернова Т.В. Чему можно и следует учить студентов // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 1. С. 141–144. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-141-144

К сожалению, курс математики воспринимается студентами как набор формул, позволяющих решать достаточно богатый объем задач, которые носят формальный характер и не слишком связаны с профессиональной деятельностью будущих инженеров. Вместе с тем, по словам Галилея, «великая книга природы написана на языке математики». Ниже приведены несколько физических задач, имеющих приложения в виде реализованных технических устройств или объяснений механизма их функционирования. Математические модели этих задач исследуются с использованием знаний не более чем двух лет втузовского курса. В основном, это умение находить экстремумы достаточно простых функций и решать дифференциальные уравнения первого или второго порядка. Укажем такие задачи: отражение и преломление световых лучей (и радиоволн) с использованием принципа Ферма. Они приводят к созданию прожектора, радиотелескопа, одноканального радара на базе диэлектрической линзы Люнеберга. Помимо этого, можно рассчитать форму трассы бобслея, найти оптимальное управление движением объекта, используя принцип максимума Понтрягина [1]. Наконец, можно определить положение планеты или искусственного спутника на орбите в любой момент времени, элементарно вывести закон всемирного тяготения [2].

Хотелось бы верить, что рассмотрение указанных задач в курсе (возможно, факультативном) математики разбудит интерес к математике как науке и поведет к более серьезному отношению к ее изучению.

Задача нахождения стационарной точки — точки отражения $(x;\ f(x))$ луча, исходящего из точки $A(p/2;\ 0)$ и осветившего точку $B(X;\ Y)$ (экран в плоскости $x0y$ задан уравнением $y = f(x) \geq \geq 0$ при $x \geq 0$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ непрерывна при $x \geq 0$) по принципу Ферма (свет распространяется по пути, проходимому за кратчайшее время) ведет к решению уравнения

$$\frac{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)+f(x)f'(x)}{\sqrt{\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+f^2(x)}}=\frac{(X-x)+(Y-f(x))f'(x)}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-f(x))^2}},$$

из которого следует, что криволинейный экран можно заменить касательной прямой в точке касания — стационарной точке, и в ней угол падения равен углу отражения.

На основании этого можно решить следующую задачу: найти форму плоского экрана $y = f(x)$, $x \geq 0$ при условиях $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ для $x > 0$; $f'(x) > 0$ для $x > 0$, после отражения от которого любой луч точечного источника, расположенного в точке $F(p/2;\ 0)$, пойдет по прямой, параллельной оси $0x$.

Эта задача сводится к решению задачи Коши

$$yy' = \left(\frac{p}{2} - x\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2},\ y(0) = 0,$$

ответом которой является функция $y^2 = 2px$, то есть парабола с фокусом в точке $F(p/2;\ 0)$. При вращении этой параболы вокруг оси $0x$ получаем параболоид вращения, являющийся отражателем прожектора, зеркалом радиотелескопа и одноканального радара, а также «телевизионных тарелок». Решение близкой к приведенной выше задачи

$$2xyy' = c^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{(c^2 - x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2},$$
$$y(-a) = 0$$

дает форму плоского экрана $y = f(x)$, после отражения от которого все лучи точечного источника $(-c;\ 0)$ попадают в точку $(c;\ 0)$. Этот экран описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Это эллипс с фокусами $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ и полуосями a,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Вращение данного эллипса (естественно, его части) вокруг оси 0x дает отражатель (часть эллипсоида вращения) медицинского лазера.

Отражение от ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,\ x \geq a$$

переводит все лучи, исходящие из фокуса $F_1(-c;\ 0)$, в лучи, исходящие из «ложного» источника в точке $F_2(c;\ 0)$. Это свойство используется и для сокрытия истинного источника излучения, и в двухзеркальной антенной системе Кассегрена. Подобная система применена в антеннах (два ряда по четыре зеркала) системы дальней космической связи. Это сделано, чтобы избежать использования большого фокусного расстояния для приемного рупора антенны.

Определение минимума функции

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2},\ 0 < x < x_2,$$

т. е. решение уравнения

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0,$$

позволяет найти точку $(x;\ 0)$, в которой луч из точки $(0;\ y_1 > 0)$, преломляясь, попадет в точку $(x_2;\ y_2 < 0)$, когда v_1 — скорость света в среде $y > 0$, а v_2 — скорость света в среде $y_2 < 0$. Условие $T'(x) = 0$, полученное на основании принципа Ферма, дает закон Снеллиуса преломления света (или радиоволны). Это позволяет исследовать эффект рефракции, когда скорость света (и коэффициент преломления) непрерывно меняется в неоднородной среде.

Для построения многоканального радара с одинаковыми в каждом канале диаграммами направленности используется диэлектрическая линза Люнеберга, переводящая излучение точечного источника, находящегося на ее поверхности, в параллельный пучок лучей подобно параболоиду вращения. Это было реализовано в действующей РЛС дальнего обнаружения.

Задача нахождения закона изменения коэффициента преломления $n = n(\vec{r})$ в линзе Люнеберга сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}r^2} = n\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

при условии $n(a) = 1$, $0 \leq r \leq a$, которое после введения дополнительного условия

$$\frac{n}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -a^2$$

путем преобразований приводит к ответу

$$n = \sqrt{2 - (r/a)^2},\ 0 \leq x \leq a\ [3–5].$$

Известная задача И. Бернулли о кривой наискорейшего спуска тяжелой точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести без учета трения — «задача о брахистохроне» — сводится (см., например, [4–8]) к поиску функции $y = y(x)$, минимизирующей интеграл

$$\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

при условиях $y(0) = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Этот интеграл можно рассматривать как время движения света с переменной скоростью $\sqrt{2gy}$ (g — постоянная силы тяжести на поверхности Земли), а его минимизацию — как реализацию принципа Ферма. Указанная задача — одна из первых задач вариационного исчисления. Она сводится к исследованию уравнения Эйлера–Лагранжа (по сути, аналога теоремы Ферма об условии экстремума функции) [5] при краевых условиях $y(0) = 0$, $y(x_0) = y_0$

$$\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\ \sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0.$$

Путем введения параметра находим решение данного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{2}(t - \sin t); \\ y = \dfrac{c}{2}(t - \cos t), \end{cases}$$

являющееся циклоидой.

Значение c однозначно определяется из условия $y(x_0) = y_0$ (при $t = 0$ имеем $y(0) = 0$).

Используя второй закон Ньютона и три закона Кеплера, легко определить в любой момент времени t, $0 \le t \le T$, положение $(a \cos \varphi(t); a \sin \varphi(t))$ на орбите планеты или искусственного спутника, где

$$\varphi(t) - \varepsilon \sin \varphi(t) = \frac{2\pi}{T} t,\ \varphi(0) = 0;$$

ε — эксцентриситет,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \text{эллипса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

т. е. орбиты (первый закон Кеплера);

T — период обращения по орбите.

Предложение круговой орбиты позволяет с помощью второго закона Ньютона и законов Кеплера в одну строку вывести закон всемирного тяготения (см., например, [2]).

Важнейшая задача — задача оптимального управления — решается с помощью открытого Л.С. Понтрягиным принципа максимума [1]. Модельной является задача оптимального быстродействия — найти управление $u(t)$, $|u(t)| \le 1$, при котором точечная масса на прямой, находящаяся в начальный момент времени $t = 0$ в положении x_0 и имеющая скорость v_0, за кратчайшее время T оказывается в точке $x = 0$ и имеет в момент $t = T$ нулевую скорость (то есть останавливает в момент $t = T$).

Математическая модель этой задачи — решение уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u(t),\ |u(t)| \le 1$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$$

и нахождение такого управления $u(t)$, что

$$x(T) = 0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=T} = 0,$$

причем T — минимально возможное.

Для удобства вводим новые (фазовые) переменные

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{dx}{dt},$$

после чего получаем систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = u(t)$$

при условиях $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = v_0$, $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$.

По принципу максимума получаем, что оптимальное управление релейно [9, 10]: $u(t) = \pm 1$ и имеет не более одного переключения, т. е.

$$u(t) = sgn(C_1 t + C_2).$$

При $u = +1$ движение происходит по части парабол

$$x_1 = \frac{1}{2}(t + A_1)^2 + A_2;\ x_2 = t + A_1,$$

а при $u = -1$ — по части парабол

$$x_1 = -\frac{1}{2}(-t + B_1)^2 + B_2;\ x_2 = -t + B_2.$$

Итак принцип Ферма позволяет получить закон отражения от прямого и изогнутого экрана. Закон преломления — закон Снеллиуса — получается, если применить принцип Ферма к границе раздела двух сред с различными плотностями. Отсюда вытекают объяснения явления рефракции. Полное внутреннее отражение (следствие закона Снеллиуса) ведет к созданию очень важного изобретения — световода. Прожектор, радиотелескоп, разные типы радиолокационных антенн — все это принцип Ферма.

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

[2] Рубинштейн А.И. Математика на службе физики и техники. М.: МГУЛ, 2015. 238 с.

[3] Фельд Я.Н., Бененсон Л.С. Антенны сантиметровых волн. М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1958. 315 с.

[4] Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 192 с.

[5] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 100 с.

[6] Cea J., Optimisation theorie et alqorithmes, Paris, 1971. 227 p.

[7] Abadie J. Non linear programming, North Holland, Amsterdam, 1967. pp. 19-36.

[8] Beltrami E.J. Methods of non linear analysis and optimisation, Academic Press, 1969. pp. 297-306.

[9] Wilde D.J., Beightler C.J. Foundations of optimisation,Pre seticeHall, 1967. 197 p.

[10] Fletcher R. Optimization. Academic Press, 1969. 383 p.

Сведения об авторах

Рубинштейн Александр Иосифович — д-р физ.-мат. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Полещук Ольга Митрофановна — д-р техн. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Чернова Татьяна Владимировна — старший преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Статья поступила в редакцию 05.09.2016 г.

WHAT YOU CAN AND SHOULD TEACH STUDENTS

A.I. Rubinshtein, O.M. Poleshchuk, T.V. Chernova

BMSTU (Mytishchi branch), 1 st. Institutskaya, 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia

rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Mathematics is perceived by students with a significant complexity. Most likely, this is due to the feeling that mathematics is a set of formal tasks of uncertain origin and it is unclear where their solutions can be applied and what they can result in, but the process of finding a solution is associated with the «balancing act» masquerading as «science.» I think that if you show the audience a number of real technical devices, the mathematical model of their functioning and just the idea of their creation can be described by simple differential equations which can be easily solved by some careful first-year or second-year students of technical universities. Or they can be engaged in finding the extremum of a function of one variable. A proper use of some facts noticed by some attentive observers in physicsis is of essence. Such factors include, for example, Fermat's principle, i.e., light (even in a heterogeneous environment) propagates along the path passable in the shortest time. So, for example, in a homogeneous medium light travels in a straight line. It is easy to check using a dark lantern which is a box with a narrow slot and with a source of light(lamp or candle) inside. This fact (Fermat's principle) allows to obtain the law of reflection from a straight screen and a curved one (on a sunny day one can see a shining bright dot which is moving along the multi-window façade of the building (for example, the «Cosmos» hotel) when one is walking along it). It is a stationary point shining. The law of refraction, i.e., Snell's law, is obtained if we apply Fermat's principle to the interface of two media with different densities (i.e. environments with different speeds of light propagation). Hence the phenomenon of refraction is explained: we see the solar disk for another minute after it went under. The total internal reflection (Shell's law consequence) has resulted in discovering optical fiber which is a very important invention. A searchlight, a radio telescope, different types of radar antennas are based on the Fermat's principle. This paper discusses these and other cases of studying simply investigated mathematical models.

Keywords: an optimal control, Newton's and Kepler's lays, a radar

Suggested citation: Rubinshtein A.I., Poleshchuk O.M., Chernova T.V. *Chemu mozhno i sleduet uchit' studentov* [What you can and should teach students]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2017, v. 21, no 1, pp. 141–144. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-141-144

References

[1] Pontraygin L.S. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* [The mathematical theory of the optimal processes], Moscow, Nauka, 1976, 392 p. (in Russian)
[2] Rubinstein A.I. *Matematika na sluzhbe fiziki i tehniki* [Mathematics on the service of Physics and enginecring], MGUL, 2015, 238 p. (in Russian)
[3] Field J.N., Benenson L.S. *Antenny santimetrovyh voln* [The acrials of the centimetrical waves, WAEA of name N.E.Zukovsky], Moscow, 1958, 315 p. (in Russian)
[4] Tslaf L.J. *Variacionnoe ischislenie i integral'nye uravnenija* [The version calculation and integralic calculation], Moscow, Nauka, 1966, 192 p. (in Russian)
[5] Filippov A. F., *Sbornik zadach po differencial'nym uravnenijam* [Collection of problems on differential equations], Moscow, Nauka, 1979, 100 p. (in Russian)
[6] CEA J., Optimisation theorie et alqorithmes, Paris, 1971, 227 p.
[7] Abadie J. Non linear programming, North Holland, Amsterdam, 1967, pp. 19-36.
[8] Beltrami E.J. Methods of non linear analysis and optimisation, Academic Press, 1969, pp. 297-306.
[9] Wilde D.J. Beightler C.J., Foundations of optimisation, Presetice Hall, 1967, 197 p.
[10] Fletcher R. Optimization. Academic Press, 1969, 383 p.

Author's information

Rubinshteyn Aleksandr Iosifovich — Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Prof., BMSTU, e-mail: rubinshtein_aleksandr@mail.ru

Poleshchuk Ol'ga Mitrofanovna — Dr. Sci. (Tech.), Prof., BMSTU, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Chernova Tat'yana Vladimirovna — Senior Lecturer, BMSTU, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Received 05.09.2016