ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 1. С. 137–140. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

УДК 534.631 DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-137-140

СХОДЯЩАЯСЯ И РАСХОДЯЩАЯСЯ ПЛОСКАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ВОЛНА В ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.В. Шмаков, П.С. Серебренников, Н.В. Шипов, Т.В. Чернова

МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская область, г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

ashmakov62@gmail.ru

Рассматривается задача распространения плоской цилиндрической волны в идеальной сжимаемой жидкости. Структура решения имеет вид интегрального уравнения с переменным верхним пределом. Существенной особенностью полученного решения является отсутствие разрыва параметров на фронте акустической волны. Решение волнового уравнения для сходящейся и расходящейся осесимметричной цилиндрической волны авторами статьи было распространено на случай неосесимметричной цилиндрической волны применительно к системе уравнений идеальной сжимаемой жидкости. Система уравнений идеальной сжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат записана в безразмерном виде. Решение системы дифференциальных уравнений найдено в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате. Введение автомодельной переменной позволило привести систему уравнений в частных производных к системе уравнений в обыкновенных производных. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений получено в явном виде, представляющем комбинацию полиномов Чебышева первого и второго рода для сходящейся и расходящейся волны соответственно. Параметры давления и скорости, характеризующие акустическую волну, распространяющуюся в жидкости, описаны в виде интегральных уравнений. Ядрами интегральных уравнений являются частные решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Переходные функции интегральных уравнений определяются из граничных условий. Условия на границе раздела могут быть заданы численно. Изложенная в статье методика может быть применена для решения плоской нестационарной задачи гидроупругости цилиндрической оболочки с жидкостью.

Ключевые слова: идеальная сжимаемая жидкость, волновое уравнение, интегральное уравнение

Ссылка для цитирования: Шмаков А.В., Серебренников П.С., Шипов Н.В., Чернова Т.В. Сходящаяся и расходящаяся плоская цилиндрическая волна в идеальной сжимаемой жидкости // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2017. Т. 21. № 1. С. 137–140. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-137-140

В источниках [1–10] рассмотрена плоская нестационарная задача гидроупругости для цилиндрической оболочки с жидкостью.

Систему уравнений идеальной сжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат запишем в безразмерном виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial r}; \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \varphi}; \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{\partial V}{\partial r} + \dfrac{V}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где V, U — нормальная и тангенциальная скорость жидкости соответственно;

P — давление в жидкости;

t — время;

r — текущий радиус;

φ — полярный угол.

В качестве масштабов выбраны величины $[P] = \rho a^2$; $[V, U] = a$; $[t] = R/a$; $[r] = R$, где ρ — плотность жидкости; a — скорость звука в жидкости; R — радиус. Решение системы (1) ищем в виде разложения в ряд Фурье по угловой координате

$$V(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \cos(n\varphi);$$

$$U(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\varphi);$$

$$P(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(n\varphi).$$

После исключения из третьего уравнения системы (1) скоростей V и U для n-й гармоники ряда получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_n}{\partial t} = -\dfrac{\partial P_n}{\partial r}; \\ \dfrac{\partial U_n}{\partial t} = \dfrac{n}{r} P_n; \\ \dfrac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial P_n}{\partial r}\right) - n^2 P_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Систему уравнений (2) относительно автомодельной переменной $z = (1 - t)/r$ перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dV_n}{dz} = z\dfrac{dP_n}{dz}; \\ \dfrac{dU_n}{dz} = nP_n; \\ (z^2 - 1)\dfrac{d^2 P_n}{dz^2} + z\dfrac{dP_n}{dz} - n^2 P_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим сходящуюся акустическую волну, распространяющуюся от границы $r = 1$. Уравнение фронта сходящейся волны определяется соотношением $r + t - 1 = 0$. Значениям $z > 1$ соответствуют точки перед фронтом, возмущения в которых равны нулю. Значение $z = 1$ соответствует фронту волны, значение давления и скорости на котором считается равным нулю. Для $|z| \leq 1$ и $n > 1$ решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\begin{cases} P_n(z) = B_n T_n(z); \\ V_n(z) = \dfrac{B_n}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}T_{n+1}(z) + \dfrac{n}{n-1}T_{n-1}(z)\right); \\ U_n(z) = \dfrac{B_n}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}T_{n+1}(z) - \dfrac{n}{n-1}T_{n-1}(z)\right), \end{cases} \quad (4)$$

где B_n – коэффициенты интегрирования;

$T_n(z) = \sin(n \arccos z)$ — полиномы Чебышева.

Следуя [8, 9], решение системы (2) для n-й гармоники разложения запишем в виде

$$\begin{cases} P_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{r+t-1} \omega_{pn}(\tau) T_n(\xi_1)\mathrm{d}\tau; \\ V_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi_1) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi_1)\right)\mathrm{d}\tau; \\ U_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{r+t-1} \frac{\omega_{un}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi_1) - \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi_1)\right)\mathrm{d}\tau, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1 - t + \tau}{r}, \; n > 1.$$

Неизвестные переходные функции $\omega_{pn}(\tau)$, $\omega_{vn}(\tau)$, $\omega_{un}(\tau)$ связаны между собой зависимостями, которые получаются после подстановки уравнений (5) в систему (2) для n-й гармоники разложения

$$\omega_{vn}(\tau) = \omega_{un}(\tau) = -\omega_{pn}(\tau).$$

Для определения переходных функций используется граничное условие. В частности, если при $r = 1$ задан закон изменения нормальной составляющей скорости жидкости $W(\varphi, t)$, то переходная функция $\omega_{vn}(\tau)$ определяется из интегральных уравнений для n-й гармоники

$$\int_0^t \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}T_{n+1}(\xi) + \frac{n}{n-1}T_{n-1}(\xi)\right)\mathrm{d}\tau = W_n(t), \quad (6)$$

где $\xi = 1 - t + \tau$, $W_n(t)$ – n-я гармоника $W(\varphi, t)$.

В случае, если правая часть в уравнениях (5) является заданной функцией времени, то интегральное уравнение (6) решается один раз для всего интервала

$$I\xi I \leq 1.$$

Рассмотрим расходящуюся акустическую волну, распространяющуюся от границы $r = 1$. Уравнение фронта расходящейся волны определяется соотношением $t - r + 1 = 0$. Значениям $z < 1$ соответствуют точки перед фронтом, возмущения в которых равны нулю. Значение $z = 1$ соответствует фронту волны, значение давления и скорости на котором считается равным нулю. Для $z \geq 1$ и $n > 1$ решение системы уравнений (2) имеет вид

$$\begin{cases} P_n(z) = B_n U_n^*(z); \\ V_n(z) = \dfrac{B_n}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}U_n^*(z) + \dfrac{n}{n-1}U_n^*(z)\right); \\ U_n(z) = \dfrac{B_n}{2}\left(\dfrac{n}{n+1}U_n^*(z) - \dfrac{n}{n-1}U_n^*(z)\right), \end{cases} \quad (7)$$

где

$$U_n^*(z) = \frac{1}{2}\left((z + \sqrt{z^2 - 1})^n - (z - \sqrt{z^2 - 1})^n\right) —$$

полиномы Чебышева второго рода для $z \geq 1$;

B_n — коэффициенты интегрирования.

Следуя [3, 4], решение системы (1) для n-й гармоники разложения запишем в виде

$$\begin{cases} P_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{t-r+1} \omega_{pn}(\tau) U_n^*(\xi_1)\mathrm{d}\tau; \\ V_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{t-r+1} \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U_{n+1}^*(\xi_1) + \frac{n}{n-1}U_{n-1}^*(\xi_1)\right)\mathrm{d}\tau; \\ U_n(r,t) = \displaystyle\int_0^{t-r+1} \frac{\omega_{un}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U_{n+1}^* T_{n+1}(\xi_1) - \frac{n}{n-1}U_{n-1}^*(\xi_1)\right)\mathrm{d}\tau, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\xi_1 = \frac{t - \tau + 1}{r}, \; n > 1.$$

Неизвестные переходные функции $\omega_{pn}(\tau)$, $\omega_{vn}(\tau)$, $\omega_{un}(\tau)$ связаны между собой зависимостями, которые получаются после подстановки уравнений (4) в систему (1) для n-й гармоники разложения:

$$\omega_{vn}(\tau) = \omega_{un}(\tau) = -\omega_{pn}(\tau).$$

Для определения переходных функций используется граничное условие. В частности, если при $r = 1$ задан закон изменения нормальной составляющей скорости жидкости $W(\varphi, t)$, то переходная функция $\omega_{vn}(\tau)$ определяется из интегральных уравнений для n-й гармоники

$$\int_0^t \frac{\omega_{vn}(\tau)}{2}\left(\frac{n}{n+1}U^*_{n+1}(\xi)+\frac{n}{n-1}U^*_{n-1}(\xi)\right)d\tau = W_n(t), \quad (9)$$

где $\xi = t - \tau + 1$; $W_n(t)$ – n-я гармоника $W(\varphi, t)$.

Список литературы

[1] Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1974, 208 с.
[2] Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 467 с.
[3] Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. Киев: Наукова думка, 1982. 410 с.
[4] Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967, 387 с.
[5] Липницкий Ю.М., Ляхов В.Н., Фельдштейн В.А. Нестационарное взаимодействие ударной волны с упругой цилиндрической оболочкой // Ученые записки ЦАГИ, 1976. Т. 7. № 1. С. 80–88.
[6] Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 286 с.
[7] Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
[8] Смирнов В.И. Решение предельной задачи для волнового уравнения в случае круга и сферы // ДАН СССР, 1937. Т. 14. № 1.
[9] Шмаков А.В. Частные автомодельные решения волнового уравнения в задачах гидродинамики // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008. Т. 15. Вып. 4. С. 723–724.
[10] Харкевич А.А. Неустановившиеся волновые явления. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 283 с.

Сведения об авторах

Шмаков Андрей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: ashmakov62@gmail.ru

Серебренников Павел Семенович — канд. физ.-мат. наук, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Шипов Николай Викторович — канд. физ.-мат. наук, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Чернова Татьяна Владимировна — старший преподаватель, МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Статья поступила в редакцию 05.09.2016 г.

CONVERGENT AND DIVERGENT PLANE CYLINDRICAL WAVE IN AN IDEAL COMPRESSIBLE FLUID

A.V. Shmakov, P.S. Serebrennikov, N.V. Shipov, T.V. Chernova

BMSTU (Mytishchi branch), 1 st. Institutskaya, 141005, Mytischi, Moscow reg., Russia

ashmakov62@gmail.ru

The article deals with the problem of propagation of plane cylindrical waves in ideal compressible fluids. The structure of the solution has the form of integral equations with a variable upper limit. An essential feature of the obtained solution is the lack of a parameter gap at the front of the acoustic wave. In the work by Smirnov V. I., DAN SSSR,1937,vol. 14, No. 1, there has been given the solution of the wave equation for an axisymmetric convergent and divergent cylindrical waves. The authors of the article have extended V.I. Smirnov's approach to cover the case of non-axisymmetric cylindrical waves with respect to the system of equations of ideal compressible liquid. The system of equations of ideal compressible fluid in cylindrical coordinate system is written in a dimensionless form. The solution of the differential equation system is sought in the form of decomposition into the Fourier series in the angular coordinate. Introducing the self-simulated variable resulted in a system of partial differential equations turned into a system of equations with ordinary derivatives. The solution of a system of ordinary differential equations is given explicitly, that is a combination of Chebyshev polynomials of the first and second kind for diverging and converging waves, respectively. The parameters of pressure and speed that characterize the acoustic wave propagation in fluids are described by integral equations. The kernels of integral equations are particular solutions of systems of ordinary differential equations. Transitional functions of the integral equations are determined from the boundary conditions. The conditions at the interface can be specified numerically. The technique described in the article can be applied to solve the plane time-dependent problem of hydroelasticity of a cylindrical shell containing liquid.

Keywords: ideal compressible liquid, an integrated equation, a wave equation

Suggested citation: Shmakov A.V., Serebrennikov P.S., Shipov N.V., Chernova T.V. *Skhodyashchayasya i raskhodyashchayasya ploskaya tsilindricheskaya volna v ideal'noy szhimaemoy zhidkosti* [Convergent and divergent plane cylindrical wave in an ideal compressible fluid]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 137–140. DOI: 10.18698/2542-1468-2017-1-137-140

References

[1] Grigolyuk E.I., Gorshkov A.G. *Nestacionarnaya gidrouprugost' obolochek* [Non-stationary hydroelasticity of covers]. Leningrad: Shipbuilding, 1974, 208 p. (in Russian)

[2] Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in continuous environments] Moscow: Fizmatlit, 2004, 467 p. (in Russian)

[3] Guz A.N., Kubenko V.D. *Teoriya nestacionarnoy ayerogidrouprugosti obolochek* [Theory of non-stationary aero hydroelasticity of covers]. Kiev: Naukova a thought, 1982, 410 p. (in Russian)

[4] Zamyshlyaev B.V., Yakovlev Yu.S. *Dinamicheskie nagruzki pri podvodnom vzryve* [Dynamic loadings at underwater explosion]. Leningrad: Shipbuilding, 1967, 387 p. (in Russian)

[5] Lipnitsky Yu.M., Lyakhov V.N., Feldstein V.A. *Nestacionarnoe vzaimodeystvie udarnoy volny s uprugoy cilindricheskoy obolochkoy* [Non-stationary interaction of a shock wave with an elastic cylindrical cover]. Scientific notes of TsAGI, 1976, t. 7, no. 1, p. 80-88. (in Russian)

[6] Mnev E.N., Pertsev A.K. *Gidrouprugost' obolochek* [Hydroelasticity of covers]. Leningrad: Sudostroyeny, 1970, 286 p. (in Russian)

[7] Slepyan L.I. *Nestacionarnye uprugie volny* [Non-stationary elastic waves]. Leningrad: Sudostroyeny, 1972, 374 p. (in Russian)

[8] Smirnov V.I. *Reshenie predel'noy zadachi dlya volnovogo uravneniya v sluchae kruga i sfery* [The solution of the limit problem for the wave equation in the case of the circle and the sphere]. DAN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1937, t. 14, no. 1. (in Russian)

[9] Shmakov A.V., *Chastnye avtomodel'nye resheniya volnovogo uravneniya v zadachah gidrodinamiki* [Private automodel solutions of the wave equation in problems of hydrodynamics]. The Review of applied and industrial mathematics, 2008, t. 15, vol. 4, pp. 723-724. (in Russian)

[10] Harkevich A.A. *Neustanovivshiesya volnovye yavleniya* [Unsteady wave phenomena]. Moscow-Leningrad: Gostexizdat, 1950, 283 p. (in Russian)

Author's information

Shmakov Andrey Vyacheslavovich — Cand. Sci. (Physico-Mathematical), Assoc. Prof., BMSTU, e-mail: ashmakov62@gmail.ru

Serebrennikov Pavel Semenovich — Cand. Sci. (Physico-Mathematical), Assoc. Prof., BMSTU, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Shipov Nikolay Viktorovich — Cand. Sci. (Physico-Mathematical), Assoc. Prof., BMSTU, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Chernova Tat'yana Vladimirovna — Senior Lecturer, BMSTU, e-mail: caf-math@mgul.ac.ru

Received 05.09.2016