

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОСЕЙ ДОРОГ НА ПЕРЕСЕЧЕННОЙ МЕСТНОСТИ

И.М. Дмитриева¹✉, Г.С. Иванов¹, В.В. Никитин²

¹ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1

²ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

idmitrieva@bmstu.ru

Предложен способ гладкого сопряжения двух скрещивающихся прямых дугой кубической окружности, который служит теоретической базой конструирования оси лесовозной дороги на пересеченной местности. Проанализирована существующая методика отдельного проектирования плана и профиля оси дороги, которая предназначена для использования на относительно равнинной местности. Показано, что такой метод не обеспечивает возможности учета всего комплекса геометрических требований, предъявляемых к оси трассы на достаточно пересеченной местности или местности, состоящей из «карстовых» областей (болот, водоемов, заповедных лесных массивов с ценными или редкими породами деревьев). К таким же исключениям относятся дороги в гористой местности, проектируемые в виде серпантинов. Представлен расчет геометрических параметров составляющих оси трассы как дуг пространственной кривой минимального, т. е. третьего порядка. Отмечено, что кривая должна быть циркулярной, как обладающая свойством плавного изменения значений первых и вторых производных (угловых коэффициентов касательных, радиусов кругов кривизны вдоль дуги кривой).

Ключевые слова: ось дороги, проекции, геометрия, одномерный обвод, пространственная кривая, нормкривая, касательная, круг кривизны, лемниската Бернулли

Ссылка для цитирования: Дмитриева И.М., Иванов Г.С., Никитин В.В. Геометрическое обеспечение конструирования осей дорог на пересеченной местности // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2026. Т. 30. № 3. С. 142–152. DOI: 10.17816/2542-1468-2026-3-142-152

Для достижения максимальной рентабельности лесопромышленного предприятия важное значение имеет эффективно организованная поставка заготовленной древесины к местам ее первичной переработки [1–3]. Более 80 % заготовленной древесины вывозится автомобильным транспортом. Составляющими любого вида транспорта являются путь и подвижной состав. Вследствие распада СССР существенно сократилось поступление в лесозаготовительную отрасль автомобилей МАЗ (Беларусь) и КрАЗ (Украина), которые служили основой лесотранспортного парка СССР в конце XX в.

Автопарк лесного комплекса Российской Федерации успешно пополняется отечественными автомобилями КамАЗ и Урал, которые хорошо зарекомендовали себя на вывозке древесины из леса. Таким образом, проблема обновления парка подвижного состава в лесной отрасли страны достаточно успешно решается.

Что касается развития сети автотранспортных путей в лесах России, здесь если и наблюдается некоторый прогресс, он носит преимущественно количественный, а не качественный характер. Объем дорожного строительства в лесных массивах растет, хотя, на наш взгляд, недостаточно высокими темпами. Плотность сети лесных автодорог в России по-прежнему невысокая и не превышает 1,5 км на 1000 га площади лесов. Рекомендуемое значение этого показателя составляет 10...12 км/1000 га [4–6], и это дает основание полагать, что для преодоления дефицита дорог в лесах страны потребуется еще немало времени.

Вопросы качественного преобразования дорожной сети в лесах связаны с применением высококачественных дорожно-строительных материалов, совершенствованием применяемых дорожных конструкций, а также модернизацией методов проектирования лесных автодорог. Последний аспект является важным, поскольку в настоящее время лесные дороги проектируются «по старинке», т. е. трасса дороги в плане обычно представляет собой гладкий

обвод, т. е. комбинацию отрезков прямых линий, сопрягаемых дугами окружностей и изредка переходных кривых. Так же конструируется проектная линия продольного профиля дороги, однако при этом радиусы сопрягающих вертикальных окружностей существенно больше горизонтальных. Данный метод проектирования лесных дорог преподается студентам, обучающимся по направлению подготовки 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств» направленности «Лесоинженерное дело» в курсе «Сухопутный транспорт леса».

Принципы проектирования автомобильных дорог общего пользования претерпели в 2000–2020-е годы существенные изменения. В частности, при проектировании продольного профиля прямолинейные участки составляют минимум протяженности пути или отсутствуют. Их заменяют дугами окружностей большого радиуса. Такие приемы обеспечивают лучшую видимость на трассе, вследствие чего возрастает скорость движения при одновременном повышении безопасности и комфорта дорожного движения. В связи с этим актуальность приобрело применение этих приемов при проектировании лесных автодорог. Очевидно, что внедрять инновационные методы проектирования лесных автодорог следует так же, как это делается в специализированных проектных организациях, проектирующих сети и отдельные участки лесных автодорог, в том числе в учебный процесс лесных вузов.

Этот тезис попытаемся обосновать на предварительных результатах работы на кафедре «Транспортно-технологические средства и оборудование лесного комплекса», организованной в 2018 г. путем объединения кафедр «Колесные и гусеничные машины» и «Начертательная геометрия и черчение». На этой кафедре наряду с профилирующими предметами студентам преподаются общеобразовательные дисциплины, в частности начертательную геометрию, инженерную графику, начертательную геометрию и инженерную графику, компьютерную графику [7–9]. В целях формирования общепрофессиональных компетенций студентов необходимо исключить «механическое» объединение кафедр без взаимопроникновения их дисциплин и методик преподавания. В связи с этим актуальность приобретает задача обеспечения их органической взаимосвязи путем поиска общих целей и методов их решения.

Цель изучения любой дисциплины в высшем учебном заведении состоит в получении компетенций, заявленных в рабочей программе

дисциплины. Например, в рабочей программе дисциплины «Начертательная геометрия и инженерная графика» по упоминаемому выше направлению подготовки 35.03.02 «Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств» наряду с прочими предусматривается получение обучающимися следующей общепрофессиональной компетенции: «... способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук». [10–18].

Цель работы

Цель работы — разработка инновационного метода построения оси лесной автодороги на пересеченной местности за счет сопряжения прямолинейных участков пути дугами кубических окружностей.

Объекты и методы исследования

Конструкция лесовозной дороги как инженерного сооружения характеризуется тремя проекциями на плоскость:

1) горизонтальную — это **план** дороги (горизонтальная проекция обвода);

2) вертикальную плоскость, проходящую через геометрическую ось дороги, — **продольный профиль** (проекция оси трассы на горизонтально проецирующую цилиндрическую поверхность, направляющей которой является план дороги);

3) вертикальную плоскость, перпендикулярную геометрической оси дороги, — **поперечный профиль** [19–21].

Стыковые точки плана, как правило, не совпадают со стыковыми точками профиля, и в итоге число конечных точек обвода равно сумме стыковых точек плана и профиля. Этого недостатка можно избежать при проектировании одномерных обводов в проекционной связи, т. е. имея проекции конструируемой кривой.

Построению кратчайших дорог, состоящих из прямолинейных участков, препятствуют складки рельефа местности, водные преграды, глубокие овраги, болота и другие препятствия. Для таких обходов при камеральном трассировании или во время изысканий назначают углы поворота. Обеспечение безопасности движения на углах поворота достигается выбором значения радиуса закругления оси пути и использованием переходных кривых, гладко сопрягающих прямолинейные участки пути, т. е. имеющих переменный радиус кривизны [22–29].

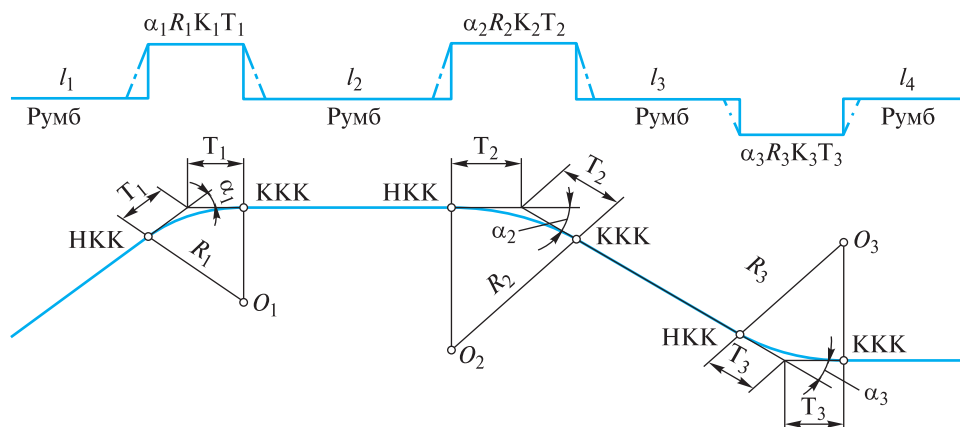


Рис. 1. Схема проектирования оси дороги
Fig. 1. Road Axis Design Diagram

Результаты и обсуждение

Дорожное полотно чаще всего не может быть проложено по естественному рельефу местности. В таких случаях необходимо искусственно поднимать или опускать его относительно земной поверхности. Для этого проектируют земляное полотно в виде сочетания насыпей и выемок с обеспечением баланса объема земляных работ. При проектировании лесовозной дороги отдельно проектируют ее план. Изображения деталей конструкции земляного полотна (насыпи и выемки, мосты, трубы, каналы, подпорные стенки и другие специальные инженерные сооружения) конструируют и рассчитывают только для отдельных участков дороги. В этом случае необходимо запроектировать специальные работы по борьбе с оползнями, отводу воды от дороги и т. п. В обычных условиях составляют лишь план трассы дороги. Трасса дороги представляет собой линию, определяющую положение на местности или на карте геометрической продольной оси дороги. Ось дороги расположена посередине поверхности, соединяющей бровки земляного полотна. Ось трассы проектируют как линию, расположенную в пространстве. Она проходит на участках насыпей выше, а на участках выемок — ниже поверхности земли.

При проектировании плана и продольного профиля трассы дороги размещение трассы дороги на местности решается комплексно и выполняется в несколько этапов:

– первый этап — решение технико-экономической задачи оптимального размещения путей в лесосырьевой базе предприятия;

– второй этап — камеральное трассирование дороги на карте в горизонталях или на аэрокосмическом фотоснимке;

– третий этап — перенос камерально запроектированной трассы в натуру.

Для обхода водоемов, болот, оврагов и других препятствий при камеральном трассировании выполняют углы поворота. При трассировании углы поворота выполняют:

- 1) для примыкания к дорогам более высокой категории;
- 2) для лучшего охвата дорожной сетью спелых насаждений;
- 3) выхода трассы на заданное направление;
- 4) обхода ситуационных препятствий;
- 5) для развития трассы при преодолении высотных препятствий.

При трассировании в каждом углу поворота проводят разбивку кривых. Для этого вычисляют основные элементы кривых: дорожные тангенсы $T_1 - T_3$, длину кривой $K_1 - K_3$, начало круговой кривой НКК, конец круговой кривой ККК, $\alpha_1 - \alpha_3$ — углы поворота, $O_1 - O_3$ — центры углов поворота, $R_1 - R_3$ — радиусы кривых, l — длина и направление (румб) прямой по известным из курса геодезии формулам (рис. 1).

В плане трассы основными являются следующие характеристики:

- длина дороги, равная сумме длин ее прямых и кривых;
- нормальный и минимальный радиусы кривых;
- средний радиус;
- коэффициент развития (удлинения) трассы.

Показателем качества трассирования выступает коэффициент развития, который определяется отдельно для магистрали, веток и усов. Нормальный и минимальный радиусы круговых кривых принимают по нормам проектирования лесовозных дорог. Исходя из условий местности, только на трудных участках назначают минимальный радиус кривой с его обязательным обоснованием.

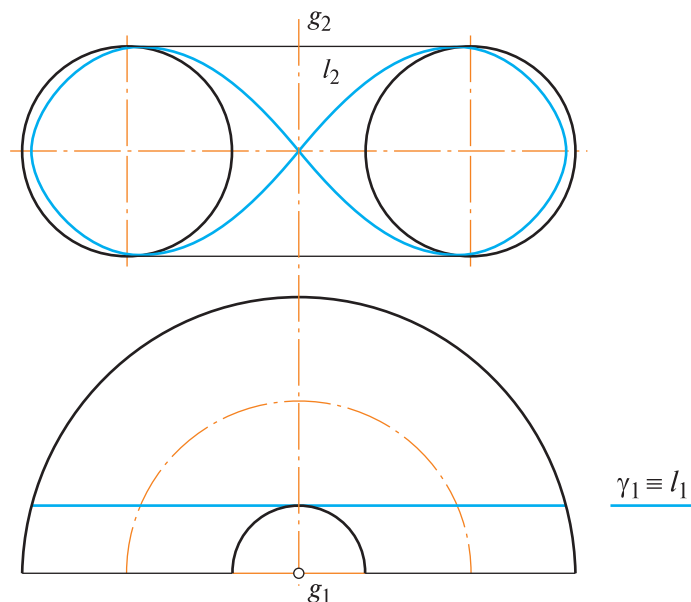


Рис. 2. Лемниската Бернулли
Fig. 2. Bernoulli's lemniscate

Продольный профиль наиболее полно характеризует путь, который вычерчивают по установленному образцу. Существует два вида проектной линии продольного профиля: обертывающая и секущая. На пересеченной местности может быть экономически выгодным применение секущей проектной линии. В этом случае проектируют частичную срезку холмов или гряд с устройством выемок и использованием полученного грунта для отсыпки соседних насыпей.

Поперечный профиль дает представление о конструкции и основных размерах земляного полотна. Основными параметрами земляного полотна, как известно, являются насыпь — земляное сооружение, искусственно поднятое над уровнем местности, и выемка — искусственное понижение дороги по отношению к местности.

На сильно пересеченной местности применяют метод сопряжения дугами парабол второго порядка (метод Антонова). Этот метод предполагает сначала эскизное построение проектной линии, а затем аппроксимацию ее дугами плоских кривых, расположенных в вертикальных плоскостях. Значения радиусов кривизны составляющих обвода и продольных уклонов подбирают таким образом, чтобы проектная линия была наиболее плавной, и ее положение не приводило бы к излишним объемам земляных работ. Для подобранных элементов составляют таблицу продольного профиля с указанием уклона, вертикальной кривой и от-

меткой оси дороги. Этот метод предусматривает соблюдение важного условия — в точках сопряжения составляющие должны иметь равные значения первых производных, т. е. равные уклоны.

В существующей практике проектирования осей дорог общего назначения, в частности лесовозных, в качестве сопрягающей кривой используется дуга окружности. У прямой кривизна равна 0, а у окружности — $1/R$, где R — радиус сопрягающей окружности. В точке стыка происходит скачок кривизны, поэтому между прямолинейным участком и сопрягающей окружностью вставляется дуга переходной кривой, в качестве которой обычно используют клотоиду. Клотоида — это трансцендентная кривая, кривизна которой линейно изменяется от 0 до $1/R$ [22] (см. рис. 1). На закруглениях небольшого радиуса и незначительными скоростями движения в качестве переходной кривой используют дугу лемнискаты Бернулли, у которой кривизна изменяется по нелинейному закону [30, 31].

В начертательной геометрии лемниската Бернулли получается как сечение l поверхности открытого тора плоскостью γ , касающейся его горловой окружности g (рис. 2).

В общем случае линиями пересечения поверхности тора плоскостями, параллельными его оси, являются кривые Персея, названные по имени греческого геометра Персея. Еще их называют спирическими линиями (в переводе с латинского: *spira* — тор).

Пусть эта поверхность образована вращением окружности l вокруг оси Oz , которая описывается уравнением

$$\begin{cases} (x-a)^2 + z^2 = r^2, \\ y = 0 \end{cases}$$

Здесь $(a; 0)$ — координаты центра окружности, r — ее радиус. Окружность l и ось Oz инцидентны одной плоскости. В уравнении образующей координату z оставим без изменения, а абсциссу заменим на выражение $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда получим уравнение

$$(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

После упрощения имеем уравнение вида

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат и получим исходное уравнение поверхности в декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Это — уравнение четвертой степени, поэтому поверхность горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостями уровня пересекается по кривым четвертого порядка. Таким образом, характерны формы кривых Персея в виде открытого, замкнутого и самопересекающегося тора.

Кривые Персея могут быть получены также планиметрическими способами. Один из этих способов определяет такие кривые как геометрическое место точек M , удовлетворяющих условию

$$MF^2 \cdot MF_1^2 = c \cdot OM^2 + c_1,$$

где F и F_1 — фиксированные точки;

O — точка, являющаяся серединой отрезка FF_1 ;

c и c_1 — постоянные.

Овалы Кассини являются частным случаем кривых Персея, когда $c = 0$. Тогда имеем условие $MF \cdot MF_1 = \sqrt{c_1} = \text{const}$. Овалы Кассини являются алгебраическими линиями 4-го порядка, симметричны относительно координатных осей.

Как известно, лемниската Бернулли представляет собой частный случай овалов Кассини и служит геометрическим местом точек M , произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек F и F_1 есть постоянная величина. Эта постоянная может выражаться любым положительным числом, определяемым квадратом половины расстояния между фиксированными точками. Располагая фиксированные точки (фокусы лемнискаты) F и F_1

на оси абсцисс и обозначая их абсциссы буквами a и $-a$, имеем равенство $MF \cdot MF_1 = a^2$, т. е.

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} &= a^2 \\ \text{или } (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнения лемнискаты $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ в полярных координатах видно, что эта кривая, будучи членом семейства овалов Кассини, относится и к семейству синусоидальных спиралей, представляя спираль с индексом $m = 2$. Из свойств синусоидальных спиралей следует, что лемниската Бернулли состоит из двух лепестков. Начало координат является для нее двойной точкой с перпендикулярными касательными $y = \pm x$. Из этих уравнений следует, что касательные в двойной точке взаимно перпендикулярны. Радиус кривизны лемнискаты в произвольной ее точке в 3 раза меньше полярной нормали в этой точке. Отсюда вытекает простой способ построения центра кривизны в произвольной точке лемнискаты. Это позволяет использовать лемнискату Бернулли в качестве переходной кривой на закруглениях малого радиуса между прямой (касательной в двойной точке) и дугой окружности. (рис. 3).

Рассмотрим сопряжение двух прямолинейных участков a, b дороги, представляющих собой две скрещивающиеся прямые, дугами окружностей 1, 2, 3, 4 (рис. 4).

Изображение в двух проекциях оси дороги на рис. 4 демонстрирует сопряжение дугой окружности m . На участке 1–2 горизонтальная проекция — отрезок, фронтальная — дуга окружности, поэтому в трехмерном пространстве она будет дугой кривой второго порядка. На участке 2–3 обе проекции представляют собой дуги окружности, поэтому в пространстве имеем дугу пространственной кривой четвертого порядка. На участке 3–4 горизонтальная проекция — дуга окружности, фронтальная — отрезок. В этом случае в пространстве имеем дугу кривой второго порядка. Таким образом, упрощение алгоритмов сопряжения отдельно на проекциях приведет, как следствие, к уложению параметров (количество составляющих, их порядок, условия стыковки) конструируемой кривой в целом. В связи с этим актуальность приобретает задача упрощения характеристик конструируемой линии. Один из подходов к ее решению состоит в разработке способа конструирования не ее проекций (!), а самой пространственной кривой в целом в виде линии пересечения двух определенным образом выбранных поверхностей с расчетными дифференциальными характеристиками. Такой способ обеспечивает получение состав-

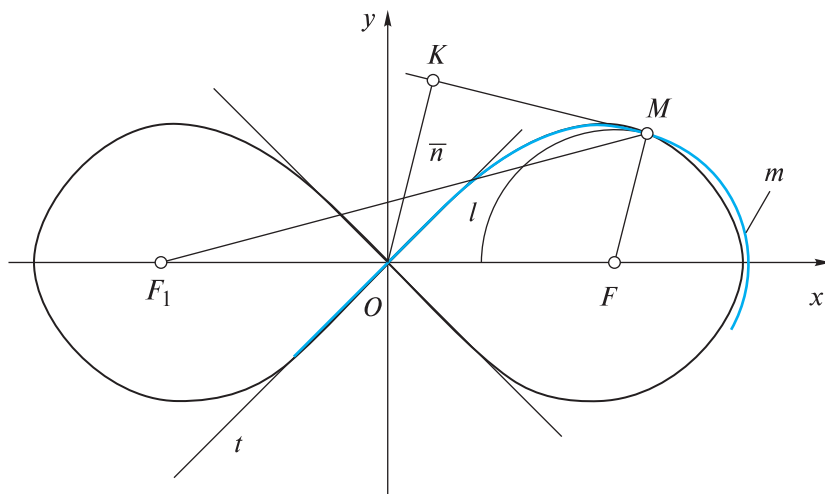


Рис. 3. Сопряжение прямой l и дуги окружности m дугой лемнискаты Бернулли
Fig. 3. Blending a straight line l and a circular arc m with a Bernoulli's lemniscata arc

ляющей минимально возможного порядка. Однако недостатком этого способа можно назвать сложность алгоритма конструирования.

Предлагаемый в настоящей работе способ конструирования оси дороги основан на сопряжении двух скрещивающихся прямых дугой кубической окружности. Кубическая окружность, как известно, является простейшей циркулярной пространственной кривой минимально возможного порядка. Циркулярные кривые обладают замечательным свойством: кривизна такой кривой по длине дуги изменяется монотонно, поэтому такие кривые используют в качестве переходной линии при сопряжении двух линий. [32, 33]. При этом в целях повышения гладкости сопряжения предлагается две скрещивающиеся прямые состыковать обводом из минимального числа составляющих. Проецированием на плоскость проекций эту задачу решить невозможно, поэтому рассмотрим вариант решения непосредственно в пространстве. Идеальным было бы сопряжение двух скрещивающихся прямых дугой одной кривой минимального порядка, т. е. пространственной кривой третьего порядка. Самая простая из них — кубическая окружность. Она будет циркулярной и поэтому дополнительно обладает рядом метрических свойств. Из кривых второго порядка такой будет только окружность. Циркулярные — это алгебраические кривые, проходящие через циклические точки плоскости и обладающие совокупностью характерных метрических свойств по сравнению с нециркулярными кривыми данного порядка. Параметрическое число у циркулярной кривой на две единицы меньше, чем у нециркулярной кривой того же порядка. Разность

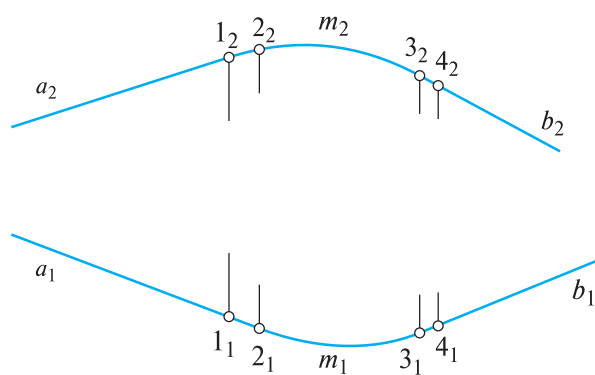


Рис. 4. Схема сопряжения двух скрещивающихся прямых a и b
Fig. 4. Pairing scheme of two crossing lines a and b

параметрических чисел нециркулярной и циркулярной кривых приходится на циклические точки. Циклические точки кривой могут быть также i -кратными. В этом случае параметрическое число кривой будет на $i(i + 1)$ меньше по сравнению с нециркулярной кривой того же порядка. Инцидентность циклическим точкам циркулярных кривых объясняет наличие у них дополнительных метрических свойств. Циклические точки вместе с несобственной прямой составляют абсолют евклидовой плоскости. Как известно из проективной геометрии, метрика соответствующей геометрии зависит от абсолюта.

Алгебраические кривые кроме порядка и класса характеризуются жанром. Жанр (род) алгебраической кривой определяется числом p , являющимся разностью между наибольшим

числом двойных точек, которые может иметь кривая данного порядка и их фактическим числом у данной кривой:

$$p = d_T - d - r,$$

где d_T — теоретически возможное число двойных точек;

d — фактическое число двойных точек (узловых и изолированных);

r — фактическое число точек возврата.

Жанр кривой порядка n определяют из уравнения

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

где n — порядок кривой;

d — фактическое число двойных точек.

Таким образом, жанр кривых третьего порядка может быть равен нулю или единице. Кривая нулевого жанра имеет максимальное количество двойных точек, поэтому она рациональная. Другими словами, координаты точки, инцидентной такой кривой, всегда могут быть выражены рациональной функцией некоторого параметра. Это свойство служит определяющим при выборе кривых для конструирования технических форм, так как в силу их рациональности проще осуществлять расчет координат точек, угловых коэффициентов касательных, длин дуг и др. Кроме того, жанр кривой сохраняется при любых взаимно однозначных преобразованиях. При конструировании кривых требуемого жанра целесообразно использовать преобразования. Если циркулярные кривые будут еще и рациональными, то их метрические свойства предпочтительны при конструировании динамических обводов. Кривые третьего порядка, как известно, бывают рациональными и нерациональными. Предпочтением пользуются циркулярные рациональные кривые. Выбор таких кривых при конструировании позволяет существенно упростить все вычисления в инженерных расчетах.

Любую пространственную кривую представляют как полную линию пересечения двух поверхностей или часть их распавшейся линии пересечения. Все приведенные выше характеристики кривых могут быть выражены через порядки пересекающихся поверхностей.

Пространственная кривая третьего порядка (нормкривая) получается как линия пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую образующую. Положение линии относительно несобственной плоскости определяет ее вид. Она может быть гиперболой третьего порядка, параболической гиперболой, эллипсом третьего порядка и параболой третьего порядка. Частный случай эллипса — кубиче-

ская окружность, если две мнимые точки пересечения эллипса с несобственной плоскостью принадлежат абсолюту пространства.

Кубическая окружность получается в результате пересечения двух конических поверхностей второго порядка в следующих случаях:

– если данные поверхности имеют одну общую образующую;

– если сечения этих поверхностей одноименными плоскостями уровня есть окружности, т. е. направляющие конических поверхностей принадлежат одной плоскости.

Пересечение двух квадрик с общей образующей AB решается графически на чертеже Монжа (рис. 5).

В рассматриваемой задаче сопряжения скрещивающихся прямых a и b с точками сопряжения $A \in a, B \in b$ пространственной кривой третьего порядка (нормкривой трехмерного пространства) β^3 фиксированы только четыре условия и остаются неиспользованными еще два условия. Варьируя значениями двух свободных параметров, можно предложить простые приемы построения сопрягающей нормкривой β^3 . Например, из центра $A \in \beta^3$ пространственная кривая третьего порядка β^3 проецируется на горизонтальную плоскость проекции в некоторую конику m^2 , а из центра

$B \in \beta^3$ в другую конику n^2 . Пусть точки M, N и K будут горизонтальными следами соответствующих прямых AB, a и b . Через точки M и N проведем окружность с центром на перпендикуляре к прямой MN в точке M , а через точки M и K — окружность с центром на перпендикуляре к прямой MN в точке M .

Полученные таким образом окружности m^2 и n^2 представляют собой центральные проекции нормкривой β^3 , проходящей через точки A и B . Конические поверхности $\Gamma(A, m)$ и $\Sigma(B, n)$ несут на себе кривую β^3 , а прямые a и b являются общими касательными этих поверхностей. Конические поверхности $\Gamma(A, m)$ и $\Sigma(B, n)$ имеют общую образующую AB , поэтому пространственная кривая четвертого порядка распадается на прямую AB и на пространственную кривую третьего порядка β^3 .

Для аналитического решения данной задачи можно воспользоваться следующими уравнениями конических поверхностей $\Gamma(A, m)$ и $\Sigma(B, n)$:

$$\left(\frac{z_A x - x_A z}{z_A - z} - x_0 \right)^2 + \left(\frac{z_A y - y_A z}{z_A - z} - y_0 \right)^2 = R_0^2,$$

$$\left(\frac{z_B x - x_B z}{z_B - z} - x_0' \right)^2 + \left(\frac{z_B y - y_B z}{z_B - z} - y_0' \right)^2 = R_0'^2,$$

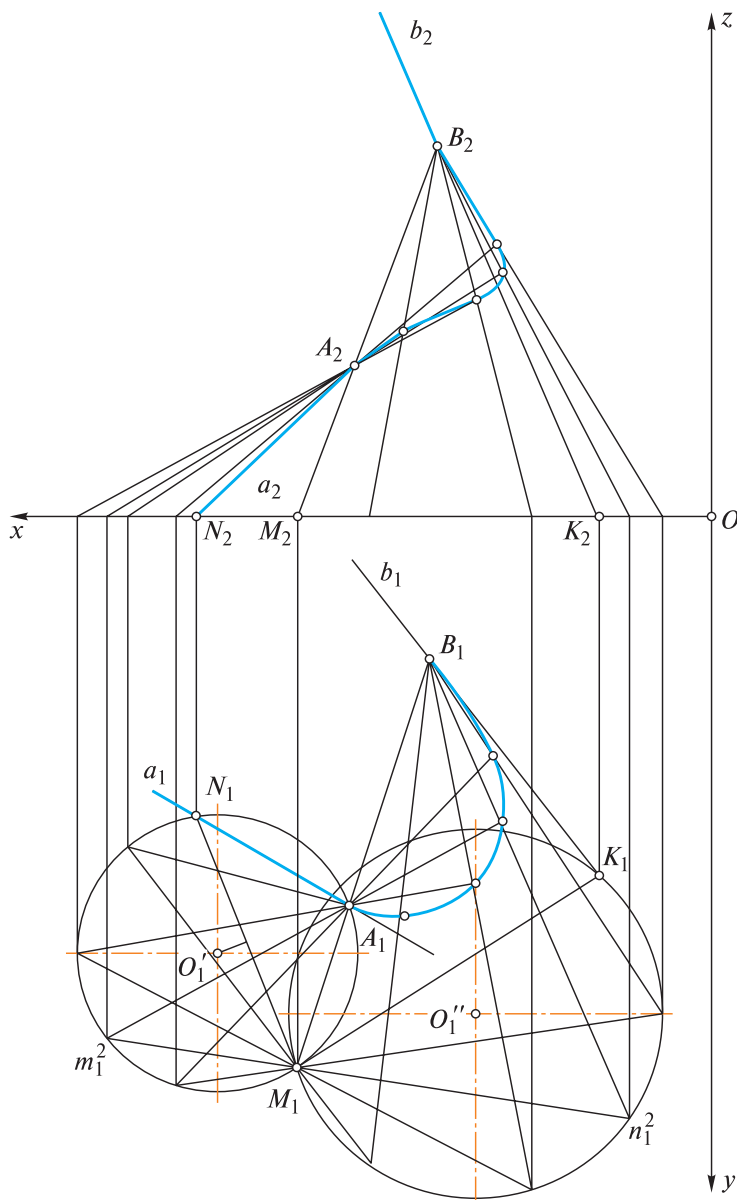


Рис. 5. Схема сопряжения двух скрещивающихся прямых дугой кубической окружности на чертеже Монжа
Fig. 5. Pairing scheme of two crossing straight arcs by a cubic circle in the Monge drawing

где $A(x_A; y_A; z_A)$ — координаты точки A ;
 $B(x_B; y_B; z_B)$ — координаты точки B ;
 $O(x_0; y_0; 0), R_0$ — координаты центра и радиус направляющей окружности m ;
 $O'(x_0; y_0; O'), R'_0$ — координаты центра и радиус направляющей окружности n .

Кубическая окружность представляет собой пространственную циркулярную кривую минимально возможного порядка, поэтому составляющие обвода получают как дуги линий пересечения двух конических поверхностей второго порядка с одной общей образующей, несущих в горизонтальных плоскостях уровня каркас

окружностей. Касательные поверхности второго порядка должны проходить через точки сопряжения заданных в трехмерном пространстве двух скрещивающихся прямых. Необходимое условие получения такого обвода заключается в принадлежности скрещивающихся прямых линии пересечения касательных плоскостей, проведенных через точки сопряжения к конструируемым поверхностям второго порядка. Достаточным условием задания составляющей обвода должна быть ее непрерывность в евклидовом пространстве в интервале точек сопряжения и отсутствие особых точек [34, 35].

Выводы

Предложенный способ сопряжения двух скрещивающихся прямых дугой одной кубической окружности можно признать оптимальным, поскольку такая дуга представляет собой циркулярную кривую минимально возможного порядка. Особенность этой кривой дополняется рядом метрических свойств вследствие инцидентности абсолюту евклидова пространства и отсутствия особых точек. Такой подход, по мнению авторов, должен обеспечить получение качественных параметров конструируемой оси дороги на пересеченной местности.

Внедрение данного метода в учебный процесс будет способствовать формированию у обучающихся планируемых результатов освоения образовательной программы по разделам курсов «Начертательная геометрия» и «Сухопутный транспорт леса» на примерах построения осей лесных дорог как гладких пространственных одномерных обводов.

Список литературы

- [1] Левушкин Д.М., Борисов В.А., Никитин В.В. Технологические расчеты при перевозке лесных грузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. 49 с.
- [2] Борисов В.А., Левушкин Д.М. Малые искусственные сооружения на предприятиях лесопромышленного комплекса. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. 63 с.
- [3] Ларионов В.Я., Левушкин Д.М. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд лесных дорог. М.: МГУЛ, 2010. 67 с.
- [4] Салминен Э.О., Грехов Г.Ф., Тюрин Н.А. Транспорт леса. Сухопутный транспорт. М.: Издательский центр «Академия», 2009. 368 с.
- [5] Ильин Б.А., Салминен Э.О. Теория лесотранспорта. СПб.: Изд-во ЛТА, 1992. 187 с.
- [6] Алябьев В.И., Ильин Б.А., Кувалдин Б.И., Грехов Г.Ф. Сухопутный транспорт леса. М.: Лесная промышленность, 1990. 416 с.
- [7] Иванов Г.С. Начертательная геометрия. М.: МГУЛ, 2012. 340 с.
- [8] Курс начертательной геометрии с алгоритмами для ЭВМ / под ред. Л.Г. Нартовой, А.М. Тевлина. М.: Изд-во МАИ, 1994. 256 с.
- [9] Сальков Н.А. Начертательная геометрия. Базовый курс. М.: Инфра-М., 2013. 184 с.
- [10] Курс начертательной геометрии на основе геометрического моделирования. Омск: Изд-во СибАДИ, 2010. 253 с.
- [11] Пеклич В.А. Высшая начертательная геометрия. М.: Изд-во АСВ, 2000. 344 с.
- [12] Тихонов-Бугров Д.Е. О некоторых проблемах графической подготовки в технических вузах (взгляд из Санкт-Петербурга). // Геометрия и графика, 2014. Т. 2. Вып. 1. С. 46–52.
- [13] Столбова И.Д., Александрова Е.П., Носов К.Г. Проектно-ориентированная деятельность студентов младших курсов // Всероссийское совещание ведущих кафедр инженерно-графических дисциплин технических вузов. Ростов-на-Дону: Изд-во ДГТУ, 2015. С. 149–158.
- [14] Волошинов Д.В. О перспективах развития геометрии и ее инструментария // Геометрия и графика, 2014. Т. 2. Вып. 1. С. 15–21.
- [15] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.
- [16] Muth P. Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie. B.G. Teubner publ., 2011, 148 p.
- [17] Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1988, 158 с.
- [18] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Физматгиз, 2002. 472 с.
- [19] Бабков В.Ф., Андреев О.В. Проектирование автомобильных дорог: в 2 ч. М.: Транспорт, 1987. Ч. 1. 368 с. Ч. 2. 415 с.
- [20] Павлов Ф.А., Вишняков А.С. Организация дорожного строительства на лесозаготовках. М.: Лесная промышленность, 1984. 224 с.
- [21] Чернякевич В.И., Пушкаренко Н.Н. Организация и технология строительства автомобильных дорог. Йошкар-Ола: Изд-во МарГТУ, 2004. 112 с.
- [22] Баранов А.Н., Данилов А.Г., Козин Г.Л. Транспорт леса. Сухопутный транспорт леса. Эксплуатация лесовозных дорог. Красноярск: Изд-во СибГТУ, 2013. 76 с.
- [23] Баранов А.Н., Еналеева-Бандура И.М. Теоретические основы сухопутного транспорта леса. Красноярск: Изд-во СибГУ, 2022. 76 с.
- [24] Булдаков С.И., Савсюк М.В. Транспорт леса. Автомобильные и лесовозные дороги. Екатеринбург: Изд-во УГЛТУ, 2016. 97 с.
- [25] Гайсин И.Г. Сухопутный транспорт леса. Вологда: Инфра-инженерия, 2023. 76 с.
- [26] Вырко Н.П., Тумашик И.И. Сухопутный транспорт леса. Минск: Изд-во БГТУ, 2005. 39 с.
- [27] Винокурова Т.Г. Сухопутный транспорт леса. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. 69 с.
- [28] Заложных В.М. Проектирование автомобильных лесовозных дорог. Воронеж: Изд-во ВГЛТА, 1999. 197 с.
- [29] Заложных В.М. Изыскания лесных дорог. Воронеж: Изд-во ВГЛТА, 2005. 147 с.
- [30] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 294 с.
- [31] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М.: Физматгиз, 1961. 263 с.
- [32] Иванов Г.С. Конструктивный способ исследования свойств параметрически заданных кривых. // Геометрия и графика, 2014. Т. 2. Вып. 3. С. 3–6.
- [33] Миролобова Т.И. Геометрические модели фасонных элементов однорукавных каналовых поверхностей: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Москва, 2004, 23 с.
- [34] Мульдеков И.О. Решения конструктивных задач описания кривых и поверхностей на основе методов оптимизации: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. Москва, 1996, 30 с.
- [35] Харах М.М., Козлова И.А., Славин Б.М., Гусева Т.В. Построение линии пересечения некоторых сложных поверхностей 2-го порядка в системе «Компас» с помощью 2D- и 3D-технологий // Геометрия и графика, 2015. Т. 3. Вып. 2. С. 38–45.

Сведения об авторах

Дмитриева Ильзина Михайловна[✉] — канд. пед. наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», idmitrieva@bmstu.ru

Иванов Геннадий Сергеевич — д-р техн. наук, профессор, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», ivanov_gs@ Rambler.ru

Никитин Владимир Валентинович — д-р техн. наук, профессор, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), nikitinvv@bmstu.ru

Поступила в редакцию 22.01.2025.

Одобрено после рецензирования 25.11.2025.

Принята к публикации 21.02.2026.

GEOMETRIC DESIGN SUPPORT OF BASELINES IN ROUGH TERRAIN

I.M. Dmitrieva^{1✉}, G.S. Ivanov¹, V.V. Nikitin²

¹BMSTU, 5, Block 1, 2nd Baumanskaya st., 105005, Moscow, Russia

²BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

idmitrieva@bmstu.ru

The article presents a method for smooth conjugation of two crossing straight lines with an arc of a cubic circle, which serves as a theoretical base for designing the axis of a timber road on rough terrain. The existing method of separate design of the road axis plan and profile, which is intended for use on relatively flat terrain, has been analyzed. It has been shown that this method does not provide the possibility of taking into account the entire set of geometric requirements for the axis of the route in sufficiently rugged terrain or terrain consisting of karstlands (swamps, water sources, protected forest areas with valuable or rare tree species). The same exceptions include roads in mountainous areas designed as highway spirals. Therefore, the calculation of geometric parameters of the baselines components as arcs of the spatial curve of the minimum, i.e. third order, is presented. It is noted that the curve should be circular, as having the property of smoothly changing the values of the first and second derivatives (angular coefficients of tangents, radii of circles of curvature along the arc of the curve).

Keywords: baseline, projections, geometry, one-dimensional bypass, skew curve, normal curve, tangent, circle of curvature, Bernoulli's lemniscata

Suggested citation: Dmitrieva I.M., Ivanov G.S., Nikitin V.V. *Geometricheskoe obespechenie konstruirovaniya osey dorog na peresechennoy mestnosti* [Geometric design support of baselines in rough terrain]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2026, vol. 30, no. 3, pp. 142–152. DOI: 10.17816/2542-1468-2026-3-142-152

References

- [1] Levushkin D.M., Borisov V.A., Nikitin V.V. *Tekhnologicheskie raschety pri perevozke lesnykh gruzov* [Technological calculations for the transportation of timber cargo]. Moscow: BMSTU, 2020, 49 p.
- [2] Borisov V.A., Levushkin D.M. *Malye iskusstvennye sooruzheniya na predpriyatiyah lesopromyshlennogo kompleksa* [Small artificial structures at the enterprises of the timber industry complex] Moscow: BMSTU, 2021, 63 p.
- [3] Larionov V.Y., Levushkin D.M. *Konstruirovaniye i raschet nezhestkih dorozhnykh odezhd lesnykh dorog* [Design and calculation of non-rigid pavement of forest roads] Moscow: MSFU, 2010, 67 p.
- [4] Salminen E.O., Grekhov G.F., Tyurin N.A. *Transport lesa. Sukhoputnyy transport* [Forest transport. Land transport]. Moscow: Akademiya Publ., 2009, 368 p.
- [5] Il'in B.A., Salminen E.O. *Teoriya lesotransporta* [Timber transport theory]. St. Petersburg: LTA, 1992, 187 p.
- [6] Alyab'ev V.I., Il'in B.A., Kuvaldin B.I., Grekhov G.F. *Sukhoputnyy transport lesa* [Land transport forest]. Moscow: Lesnaya promyshlennost', 1990, 416 p.
- [7] Ivanov G.S. *Nachertatel'naya geometriya* [Descriptive geometry]. Moscow: MSFU, 2012, 340 p.
- [8] Nartova L.G., Tevlin A.M. *Kurs nachertatel'noy geometrii s algoritmami dlya EVM* [Course of descriptive geometry with computer algorithms]. Moscow: MAU, 1994, 256 p.
- [9] Sal'kov N.A. *Nachertatel'naya geometriya. Bazovyy kurs* [Descriptive geometry. Basic course]. Moscow: Infra-M Publ., 2013, 184 p.

- [10] Volkov V.Y. *Kurs nachertatel'noy geometrii na osnove geometricheskogo modelirovaniya* [Course in descriptive geometry based on geometric modeling]. Omsk: SibADI Publ., 2010, 253 p.
- [11] Peklich V.A. *Vysshaya nachertatel'naya geometriya* [Higher descriptive geometry]. Moscow: ASV Publ., 2000, 344 p.
- [12] Tihonov-Bugrov D.E. *O nekotorykh problemakh graficheskoy podgotovki v tehniceskikh vuzakh (vzglyad iz Sankt-Peterburga)* [About some problems of graphic training in technical universities (the view from St. Petersburg)]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2014, v. 2, iss. 1, pp. 46–52. DOI: 10.12737/3848
- [13] Stolbova I.D., Aleksandrova E.P., Nosov K.G. *Proektno-orientirovannaya deyatel'nost' studentov mladshih kursov* [Project-oriented activity of junior students]. *Vserossiyskoe soveshchanie zaveduyushchih kafedrami inzhenerno-graficheskikh disciplin tekhnicheskikh vuzov* [All-Russian meeting of heads of departments of engineering and graphic disciplines of technical universities]. Rostov-na-Donu: DGTU Publ., 2015, pp. 149–158.
- [14] Voloshinov D.V. *O perspektivah razvitiya geometrii i ee instrumentariya* [About the prospects of geometry and its instrumentation] *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2014, v. 1, iss. 1, pp. 15–21. DOI: 10.12737/3844
- [15] Mandel'brot B. *Fraktal'naya geometriya prirody* [Fractal geometry of nature]. Moscow, 2002, 656 p.
- [16] Muth P. *Grundlagen für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie*. B.G. Teubner publ., 2011, 148 p.
- [17] Ivanov G.S. *Teoreticheskie osnovy nachertatel'noy geometrii* [Theoretical foundations of descriptive geometry]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1988, 158 p.
- [18] Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric modeling]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 2002, 472 p.
- [19] Babkov V.F., Andreev O.V. *Proektirovanie avtomobil'nyh dorog* [Road design]. Moscow: Transport, 1987, ch. 1, 368 p.; ch. 2, 415 p.
- [20] Pavlov F.A., Vishnyakov A.S. *Organizatsiya dorozhnogo stroitel'stva na lesozagotovkah* [Organization of road construction at logging sites]. Moscow: Lesnaya promyshlennost', 1984, 224 p.
- [21] Chernyakevich V.I., Pushkarenko N.N. *Organizatsiya i tekhnologiya stroitel'stva avtomobil'nyh dorog* [Organization and technology of road construction]. Joshkar-Ola: MarGTU, 2004, 112 p.
- [22] Baranov A.N., Danilov A.G., Kozinov G.L. *Transport lesa. Sukhoputnyy transport lesa. Eksploatatsiya lesovoznykh dorog* [Forest transportation. Overland forest transportation. Operation of forest roads]. Krasnoyarsk: SibGTU, 2013, 76 p.
- [23] Baranov A.N., Enaleeva-Bandura I.M. *Teoreticheskie osnovy sukhoputnogo transporta lesa* [Theoretical bases of land transport of forests]. Krasnoyarsk: SibGU, 2022, 76 p.
- [24] Buldakov S.I., Savsyuk M.V. *Transport lesa. Avtomobil'nye i lesovoznye dorogi* [Forest transportation. Roads and forest roads]. Ekaterinburg: USFEU, 2016, 97 p.
- [25] Gaysin I.G. *Sukhoputnyy transport lesa* [Land transport of forests]. Vologda: Infra-inzheneriya, 2023, 76 p.
- [26] Vyrko N.P., Tumashik I.I. *Sukhoputnyy transport lesa* [Land transport of forests]. Minsk: BGTU, 2005, 39 p.
- [27] Vinokurova T.G. *Sukhoputnyy transport lesa: uch. posobie* [Land transport of forests]. Petrozavodsk: PetrGU, 2013, 69 p.
- [28] Zalozhnykh V.M. *Proektirovanie avtomobil'nykh lesovoznykh dorog* [Design of automobile forest roads]. Voronezh: VGLTA, 1999, 197 p.
- [29] Zalozhnykh V.M. *Izyskaniya lesnykh dorog* [Survey of forest roads]. Voronezh: VGLTA, 2005, 147 p.
- [30] Savelov A.A. *Ploskie krivye. Sistematika, svoystva, primeneniya. (Spravochnoe rukovodstvo)*. [Flat curves. Systematics, properties, application. Reference guide]. Moscow–Izhevsk: «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» Research Center, 2002, 294 p.
- [31] Smogorzhevskiy A.S., Stolova E.S. *Spravochnik po teorii ploskikh krivykh tret'ego poryadka* [Handbook of third-order plane curve theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 263 p.
- [32] Ivanov G.S. *Konstruktivnyy sposob issledovaniya svoystv parametri-cheski zadannykh krivykh* [Constructive way of studying properties of parametrically defined curves]. *Geometriya i grafika*, 2014, t. 2, v. 3, pp. 3–6.
- [33] Miroyubova T.I. *Geometricheskie modeli fasonnykh elementov odno-rukavnykh kanalovykh poverhnostey* [Geometric models of shaped elements of single-arm channel surfaces]. Abstract Dis. Cand. Sci. (Tech.). Moscow, 2004, 23 p.
- [34] Mul'dekov I.O. *Resheniya konstruktivnykh zadach opisaniya krivykh i po-verhnostey na osnove metodov optimizatsii* [Solving constructive problems of describing curves and surfaces based on optimization methods]. Dis. Dr. Sci. (Tech.). Moscow, 1996, 30 p.
- [35] Harah M.M., Kozlova I.A., Slavin B.M., Guseva T.V. *Postroenie linii peresecheniya nekotorykh slozhnykh poverhnostey 2-go poryadka v «Kompas» s pomoshch'yu 2D- i 3D-tekhnologiy* [Construction of a line of intersection of some complex surfaces of the 2nd order in «Compass» using 2D and 3D technologies]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. Moscow, 2015, v. 3, iss. 2, pp. 38–45.

Authors' information

Dmitrieva Il'zina Mikhaylovna✉ — Cand. Sci. (Pedagogy), Associate Professor of the BMSTU, idmitrieva@bmstu.ru

Ivanov Gennadiy Sergeevich — Dr. Sci. (Tech.), Professor of the BMSTU, ivanov_gs@rambler.ru

Nikitin Vladimir Valentinovich — Dr. Sci. (Tech.), Professor of the BMSTU (Mytishchi branch), nikitinvv@bmstu.ru

Received 22.01.2025.

Approved after review 25.11.2025.

Accepted for publication 21.02.2026.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи
 Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
 Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article
 The authors declare that there is no conflict of interest