

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ДОРОЖНОГО МАТА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДВИЖИТЕЛЯ ЛЕСНОЙ МАШИНЫ

М.В. Зорин<sup>1</sup>, Е.Г. Хитров<sup>2</sup>✉, О.А. Куницкая<sup>3</sup>,  
П.С. Елисеев<sup>4</sup>, А.М. Юдилевич<sup>5</sup>, В.Е. Клубничкин<sup>4</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова» (ВГЛТУ), Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Тимирязева, д. 8

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Россия, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

<sup>3</sup>ФГБОУ ВО «Арктический государственный агротехнологический университет», Россия, 677007, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, Сергеляхское шоссе, 3-й километр, д. 3

<sup>4</sup>ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МгИТУ), Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

<sup>5</sup>ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», Россия, 665709, Иркутская область, г. Братск, ул. Макаренко, д. 40

yegorkhitrov@gmail.com

Рассмотрена математическая модель взаимодействия колесного штампа-двигателя с двухслойной опорной поверхностью, состоящей из синтетического дорожного мата и подстилающего лесного почвогрунта. Предложена модель деформируемой плиты, размещенной на податливом (винклеровском) основании. Предложена конечно-разностная схема, предполагающая произвольное распределение нагрузки по узлам сетки, для решения дифференциального уравнения прогиба плиты (и осадки основания), а также несколько вариантов закрепления граничных узлов. Разработана программа на языке Python для реализации предложенной модели. С использованием данной программы проведен вычислительный эксперимент. Отклонение расчетных данных от частного случая точного решения не превысило 5 %. Обработка расчетных данных позволила получить уравнение, удобное при оценке глубины колеи на композитном основании, образующейся под воздействием двигателя.

**Ключевые слова:** временные лесные дороги, укрепление трелевочных волоков, сборно-разборные дорожные покрытия, лесозаготовки, трелевка, сухопутный транспорт леса

**Ссылка для цитирования:** Зорин М.В., Хитров Е.Г., Куницкая О.А., Елисеев П.С., Юдилевич А.М., Клубничкин В.Е. Конечно-разностная схема для расчета прогиба дорожного мата под воздействием двигателя лесной машины // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2025. Т. 29. № 1. С. 96–111.

DOI: 10.18698/2542-1468-2025-1-96-111

Одной из основных проблем современного лесного комплекса Российской Федерации является слаборазвитая дорожная сеть на землях лесного фонда. По этой причине резко снижена эффективность лесохозяйственных мероприятий, повышена трудоемкость предупреждения и тушения лесных пожаров, дорожает продукция отрасли [1–7]. Специфика лесной дорожной сети заключается в том, что большая часть дорог и технологических коридоров используется относительно небольшой срок, что позволяет обустраивать их по упрощенной технологии, в частности сборно-разборными дорожными покрытиями [8–12].

### Цель работы

Цель работы — изучение характера связи механических свойств синтетического материала и толщины дорожных матов с прочностью получаемого композитного основания (лесной грунт + дорожный мат), находящегося под воздействием колесного двигателя-штампа.

### Объекты и методы исследования

Оценкой прочности служит глубина колеи, образующейся под воздействием двигателя, поскольку известно, что при образовании колеи глубже 20 см возникают критические последствия для лесной экосистемы и, кроме того, вероятно потеря машиной опорной проходимости [13–17].

С точки зрения механики возникает задача моделирования работы деформируемой плиты, расположенной на податливом грунтовом основании; условия закрепления плиты по краям различны и определяются физической картиной процесса [18–21].

В качестве основного уравнения, связывающего деформацию мата под нормальным воздействием движителя, примем дифференциальное уравнение прогиба плиты, лежащей на винклеровском основании.

Для выполнения расчетов необходима оценка коэффициента постели грунта по его механическим свойствам. Для этого проведены расчеты переменных параметров лесного грунта и нормального давления движителя в качестве входных данных, решено известное нелинейное уравнение осадки штампа-движителя, аппроксимированы результаты расчета. В итоге получена оценка коэффициента постели грунта, который по физическому смыслу моделирует соотношение давления движителя и осадки грунта в заданном диапазоне давления с учетом модуля общей деформации лесного грунта.

Кроме того, известно, что уравнение в частных производных для прогиба плиты имеет аналитическое решение лишь в некоторых случаях при определенном закреплении плиты, круговой и эллиптической эпюрах давления. При сложном характере закрепления плиты, размещенной на винклеровском основании, и иных эпюрах давления, характерных для движителей лесных машин, точного решения не получено [22–25]. По этой причине используем численные методы, позволяющие оценить прогиб на основе разностных схем аппроксимации частных производных в уравнении деформации плиты.

## Результаты и обсуждение

По определению, коэффициент постели грунта  $k$  в уравнении измеряется в Паскалях на метр — Па/м, и описывает линейную связь нормального давления на грунт и его осадки. Для оценки коэффициента используем широко известное уравнение глубины колеи, образующейся под воздействием штампа-движителя

$$h = \frac{KJpb}{(p_s - p)\sqrt{1 - pJK}} \arctg\left(\frac{H - h}{ab\sqrt{1 - pJK}}\right), \quad (1)$$

где  $K$  — жесткость грунта (выражение принимается с учетом реологической модели лесного грунта);

$J$  — геометрический параметр штампа, зависящий от соотношения его сторон;

$p$  — нормальное давление штампа на грунт;

$a$  — коэффициент, учитывающий соотношение ширины штампа и глубины распространения деформаций;

$b$  — ширина штампа;

$p_s$  — несущая способность грунта с учетом глубины распространения деформаций;

$H$  — толщина деформируемого слоя грунта;

$h$  — осадка (глубина колеи).

Выражения для параметров, входящих в уравнение (1), также широко известны. Несущая способность определяется по формуле

$$p_{s,0} = p_{s,0}\alpha_z, \quad (2)$$

в которой множитель  $p_{s,0}$  отражает влияние сцепных, фрикционных свойств лесного грунта и геометрии штампа:

$$p_{s,0} = 0,5J_1N_1\gamma b + N_1\gamma h + J_3N_3C, \quad (3)$$

$$S = \operatorname{tg} \frac{\pi - 2\varphi}{4}, \quad N_1 = \frac{1 - S^4}{S^5}, \quad (4)$$

$$N_2 = \frac{1}{S^2}, \quad N_3 = 2\frac{1 + S^2}{S^3},$$

где  $J_1, J_2, S, N_1, N_2, N_3$  — вспомогательные обозначения;

$\gamma, C, \varphi$  — соответственно удельный вес, удельное сцепление и угол внутреннего трения лесного грунта

$$J_1 = \frac{l}{l + 0,4b}, \quad J_3 = \frac{l + b}{l + 0,5b}, \quad (5),$$

где  $l$  — длина штампа.

Множитель  $\alpha_z$  в формуле (2) учитывает влияние глубины распространения деформаций на несущую способность:

$$\alpha_z = 1 + \frac{0,5H_p h}{(H - h - 0,25H_p)H}; \quad (6)$$

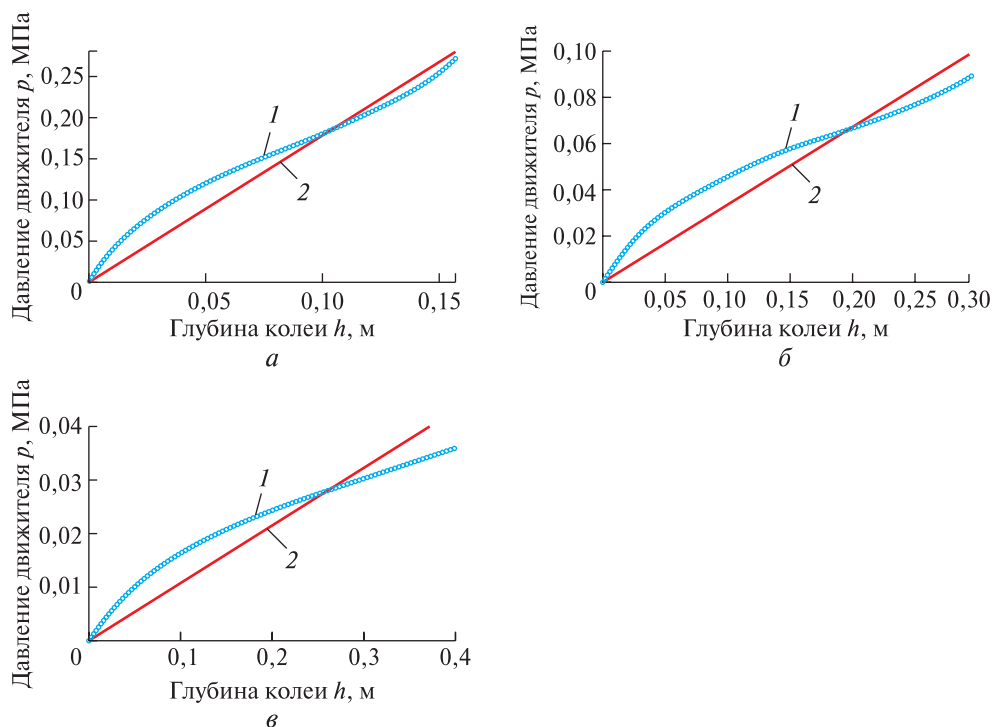
$$H_p = \frac{\sqrt{2}}{2} b \operatorname{tg} \varphi \cos \frac{3\varphi}{4} \exp\left(\frac{\pi + 3\varphi}{4} \operatorname{tg} \frac{3\varphi}{4}\right). \quad (7)$$

Физико-механические свойства лесного грунта можно выразить через модуль общей деформации по формулам

$$K = \frac{1}{E}, \quad C = \frac{10,774}{10^3} E^{0,7737}, \quad \varphi = 13,669 E^{0,7737}; \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{8,4008}{10^3} E^{0,1168}, \quad H = 0,4714 E^{-0,479}.$$

Параметры  $J, a$  в уравнении (2), определяются по формулам



**Рис. 1.** Результаты расчета давления движителя в зависимости от глубины колеи: а — лесной грунт I категории ( $E = 3,0$  МПа); б — лесной грунт II категории ( $E = 1,0$  МПа); в — лесной грунт III категории ( $E = 0,4$  МПа); 1 — расчетные данные; 2 — линейная аппроксимация

**Fig. 1.** Calculation results of propulsion pressure depending on track depth: а — forest soil of category I ( $E = 3,0$  МПа); б — forest soil of category II ( $E = 1,0$  МПа); в — forest soil category III ( $E = 0,4$  МПа); 1 — calculated data; 2 — linear approximation

$$J = \frac{0,03 + \frac{l}{b}}{0,6 + 0,43 \frac{l}{b}}, \quad a = 0,64 \left( 1 + \frac{b}{H} \right). \quad (9)$$

Проведены расчеты значения давления  $p$ , приводящего к образованию колеи глубиной  $h$ , для трех категорий лесного грунта. В расчетах принято, что  $b = 0,7$  м,  $l > b$  (рис. 1). Для трех рассмотренных случаев к удовлетворительным результатам (табл. 1) приводит аппроксимация расчетных данных линейной функцией

$$p = kh. \quad (10)$$

Сопоставим полученные значения коэффициента постели грунта  $k$  и модуля деформации  $E$  (рис. 2).

Окончательно получим квадратичную зависимость  $k(E)$

$$k = 0,1252E^2 + 0,219E. \quad (11)$$

Получена оценка коэффициента постели лесного грунта в зависимости от его модуля общей деформации. Ранее такая оценка непосредственно для лесного грунта не выполнялась.

В качестве модели синтетического мата, размещенного на лесном грунте, используем модель плиты. Воздействие движителя смоделируем нагрузкой, распределенной по площади плиты.

Уравнение прогиба  $w(x,y)$  плиты, лежащей на деформируемом (винклеровском) основании, представляет собой дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} + \frac{k}{d} w(x,y) = \frac{q(x,y)}{d}, \quad (12)$$

где  $d$  — цилиндрическая жесткость плиты (параметр плиты);

$w(x,y)$  — функция прогиба плиты;

$q(x,y)$  — функция распределения нагрузки (давления движителя) по поверхности плиты.

Коэффициент  $k$  определяется в зависимости от модуля деформации лесного грунта  $E$  формулой (11).

Цилиндрическую жесткость плиты  $D$  можно найти из уравнения

$$D = \frac{E_0 H_0^3}{12(1 - \mu_0^2)}, \quad (13)$$

где  $E_0$  — модуль упругости материала плиты;  
 $H_0$  — толщина плиты;  
 $\mu_0$  — коэффициент Пуассона плиты.

В зависимости от условий закрепления плиты задаются граничные условия. Например, для края, где плита жестко закреплена (заделка), следует положить два граничных условия при геометрическом параметре  $a$ , соответствующем схеме закрепления (рис. 3)

$$\begin{cases} w(x, y)|_{x=a} = 0 \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}|_{x=a} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w(x, y)|_{y=a} = 0 \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}|_{y=a} = 0 \end{cases}, \quad (14)$$

где  $a$  принимается одним из значений в наборе  $\{0; W; L\}$ , здесь  $W$  — ширина плиты (соответствует размеру мата в направлении, перпендикулярном трассе),  $L$  — длина плиты (соответствует размеру мата в продольном направлении);

– для шарнирного закрепления

$$\begin{cases} w(x, y)|_{x=a} = 0 \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}|_{x=a} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w(x, y)|_{y=a} = 0 \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}|_{y=a} = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

– для условий свободного провисания края

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}|_{x=a} = 0, \\ \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \mu_0) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y \partial x^2}|_{x=a} = 0 \end{cases}, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}|_{y=a} = 0, \\ \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \mu_0) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2}|_{y=a} = 0. \end{cases}$$

Применительно к решаемой задаче моделирования воздействия движителя на синтетический мат, размещенный на лесном грунте, такие условия в чистом виде едва ли возможны. Тем не менее с некоторыми допущениями прием, что условия шарнирного закрепления (15) выполняются по краям плиты вдоль трассы движения при наличии направляющих лаг, а в местах стыковки двух матов край условно

Т а б л и ц а 1

Результаты линейной аппроксимации давления по глубине колеи  
 Results of Linear Approximation of Pressure by Track Depth

Категория грунта	Модуль деформации $E$ , МПа	Коэффициент постели грунта $k$ , МПа/м	Коэффициент аппроксимации $R^2$
I	3,0	1,784	0,8010
II	1,0	0,344	0,8768
III	0,4	0,108	0,9686

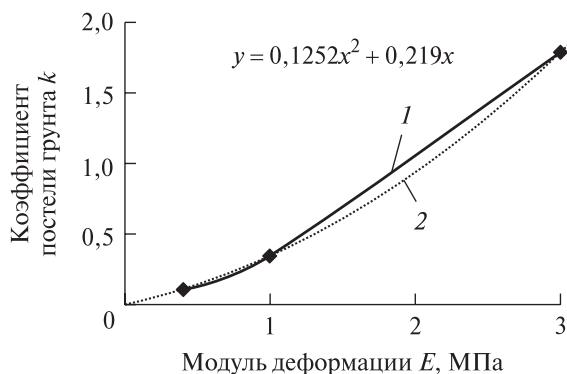


Рис 2. Коэффициент постели грунта в зависимости от модуля общей деформации лесного грунта

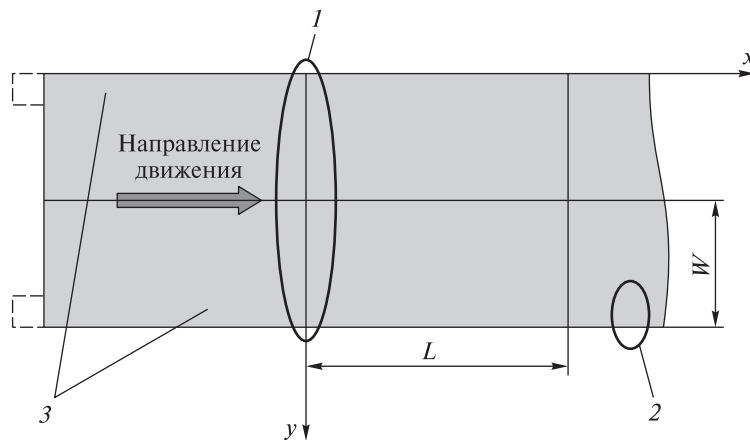
Fig. 2. Bedding coefficient depending on the modulus of the general deformation of the forest soil

свободно провисает. Логику такого допущения можно объяснить физической картиной процесса: направляющие лаги препятствуют нормальному перемещению плиты в месте крепления, но едва ли препятствуют повороту мата в перпендикулярном направлении. При этом в местах стыковки нет существенных препятствий для прогиба матов.

Для получения решения уравнения (12) используем метод конечных разностей. Непрерывная область, ограниченная длиной и шириной деформируемой плиты, заменяется конечномерной сеткой с равномерным шагом  $s$  (см. рис. 4).

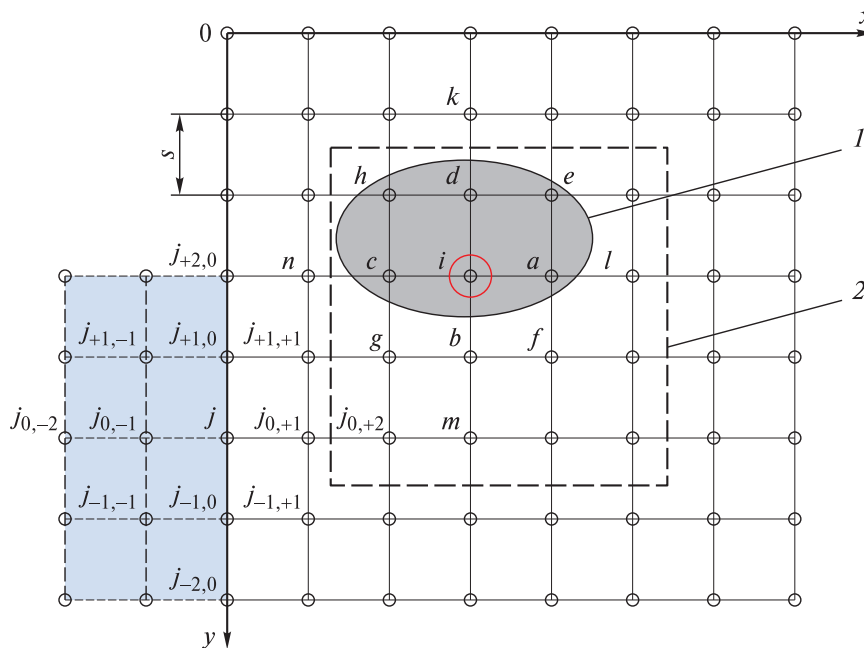
Частные производные по уравнению (12) заменяются конечно-разностными аппроксимациями на сетке с заданным шагом  $s$ :

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} \approx \frac{w(x - 2s, y) - 4w(x - s, y) + 6w(x, y) - 4w(x + s, y) + w(x + 2s, y)}{s^4}; \quad (17)$$



**Рис. 3.** Схема к определению граничных условий для решения задачи:  $1$  — участок стыковки соседних матов;  $2$  — участок стыковки соседних лаг;  $3$  — направляющие лаги

**Fig. 3.** Scheme for determining the boundary conditions for solving the problem:  $1$  — the docking area of adjacent mats;  $2$  — the docking area of adjacent logs;  $3$  — guide logs



**Рис. 4.** Составление конечно-разностной схемы для решения уравнения прогиба плиты:  $i$  — узел, для которого составляется разностное уравнение на данном шаге;  $1$  — эпюра давления;  $2$  — область, в которой находятся внутренние узлы стеки, вне этой области — узлы, разностные уравнения в которых определяются граничными условиями, и фиктивные узлы

**Fig. 4.** Drawing up a finite-difference scheme for solving the slab deflection equation:  $i$  — is the node for which the difference equation is compiled at this step;  $1$  — is the pressure diagram;  $2$  — the area in which the internal nodes of the stack are located, outside this area — the nodes, the difference equations in which are determined by the boundary conditions and fictitious nodes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} &\approx \\ &\approx \frac{w(x, y - 2s) - 4w(x, y - s) + 6w(x, y)}{s^4} - \\ &\quad - \frac{4w(x, y + s) + w(x, y + 2s)}{s^4}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} &\approx \\ &\approx \frac{w(x - s, y - s) - 2w(x, y - s) + w(x + s, y - s)}{s^4} + \\ &\quad + \frac{-2w(x - s, y) + 4w(x, y) - 2w(x + s, y)}{s^4} + \\ &\quad + \frac{w(x - s, y + s) - 2w(x, y + s) + w(x + s, y + s)}{s^4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения для частных производных, входящих в граничные условия (14) – (16), задаются следующими формулами:

– для первых частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &\approx \frac{w(x + s, y) - w(x - s, y)}{2s}, \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &\approx \frac{w(x, y + s) - w(x, y - s)}{2s}; \end{aligned} \quad (20)$$

– для вторых частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} &\approx \frac{w(x + s, y) - 2w(x, y) + w(x - s, y)}{s^2}, \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} &\approx \frac{w(x, y + s) - 2w(x, y) + w(x, y - s)}{s^2}; \end{aligned} \quad (21)$$

– для частных производных третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} &\approx \\ &\approx \frac{w(x - 2s, y) - 2w(x - s, y)}{2s^3} + \\ &\quad + \frac{2w(x + s, y) - w(x + 2s, y)}{2s^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} &\approx \\ &\approx \frac{w(x, y - 2s) - 2w(x, y - s)}{2s^3} + \\ &\quad + \frac{2w(x, y + s) - w(x, y + 2s)}{2s^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y \partial x^2} &\approx \\ &\approx \frac{w(x + s, y + s) - 2w(x, y + s)}{2s^3} + \\ &\quad + \frac{w(x - s, y + s) - w(x + s, y - s)}{2s^3} - \\ &\quad - \frac{2w(x, y - s) + w(x - s, y - s)}{2s^3}; \\ \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} &\approx \\ &\approx \frac{w(x + s, y + s) - 2w(x + s, y)}{2s^3} + \\ &\quad + \frac{w(x + s, y - s) - w(x - s, y + s)}{2s^3} - \\ &\quad - \frac{2w(x - s, y) + w(x - s, y - s)}{2s^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Схема, поясняющая порядок составления разностных уравнений, представлена на рис. 4. Таким образом, вместо исходного уравнения (12) в каждом внутреннем узле сетки (на рис. 4 обозначены точками), запишем уравнение относительно неизвестных значений  $w$

$$\begin{aligned} &\frac{w(x - 2s, y) + w(x + 2s, y)}{s^4} + \\ &\quad + \frac{w(x, y - 2s) + w(x, y + 2s)}{s^4} - \\ &\quad - 2 \frac{w(x - s, y - s) + w(x + s, y - s)}{s^4} + \\ &\quad + - 2 \frac{w(x + s, y + s) + w(x - s, y + s)}{s^4} - \\ &\quad - 8 \frac{w(x - s, y) + w(x + s, y) + w(x, y - s) + w(x, y + s)}{s^4}. \end{aligned} \quad (23)$$

Например, для узла  $i$ , отмеченного окружностью на рис. 4, можно записать в обозначениях схемы, приведенной на рисунке, следующее выражение

$$\begin{aligned} &\frac{w_k + w_l + w_m + w_n}{s^4} + \\ &\quad + 2 \frac{w_e + w_f + w_g + w_h}{s^4} - \\ &\quad - 8 \frac{w_a + w_b + w_c + w_d}{s^4} + \\ &\quad + 20 \frac{w_i}{s^4} + \frac{k}{D} w_i = \frac{q_i}{D}. \end{aligned} \quad (24)$$

Число узлов по оси  $x$  обозначим  $m$ , по оси  $y$  —  $n$ . Тогда в решении задачи будет фигурировать  $mn$  значений  $w$ . Для внутренних узлов составим  $(m - 4)(n - 4)$  уравнений. Оставшиеся уравнения, необходимые для корректного решения задачи, получим на основе условий закрепления плиты.

Аппроксимации для узлов  $j$  принимаем в соответствии с граничными условиями, например — для заделки

$$w_j = 0, \frac{w_{j,j-1} - w_{j,j+1}}{2s} = 0, \quad (25)$$

— для шарнирного закрепления

$$w_j = 0, \frac{w_{j,j-1} - 2w_j + w_{j,j+1}}{s^2} = 0, \quad (26)$$

— для условий свободного провисания

$$\begin{aligned} & \frac{w_{j-1,j} - 2w_j + w_{j+1,j}}{s^2} + \\ & + \mu_0 \frac{w_{j,j-1} - 2w_j + w_{j,j+1}}{s^2} = 0; \quad (27) \\ & \frac{w_{j-2,j} - 2w_{j-1,j} + 2w_{j+1,j} - w_{j+2,j}}{2s^3} + (2 - \mu_0) \times \\ & \times \frac{w_{j+1,j+1} - 2w_{j,j+1} + w_{j-1,j+1} - w_{j+1,j-1} + 2w_{j,j-1} - w_{j-1,j-1}}{2s^3} = 0. \end{aligned}$$

При этом оценки прогиба в фиктивных узлах могут задаваться различными способами; при достаточно малом шаге сетки можем положить  $w_{j-1}, w_{j-2} \approx 0$ .

Таким образом, на основе конечно-разностной схемы приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $w_i$ . В матричном виде система имеет вид

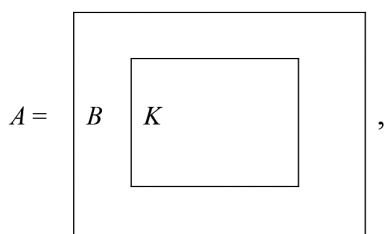
$$Aw = b, \quad (28)$$

где  $A$  — матрица системы линейных алгебраических уравнений с числом элементов  $(n \times m)^2$ ;

$w$  — вектор решений (оценки прогиба плиты в узлах конечно-разностной сетки);

$b$  — вектор правых частей (задается в зависимости распределения внешней нагрузки).

Матрица  $A$  имеет специальную структуру



где «ядро»  $K$  формируется следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} D & S & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ S & D & S & I & \dots & 0 & 0 \\ I & S & D & S & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S & D & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & S & D \end{pmatrix},$$

где блоки  $D, S, I$  имеют размер  $(n - 4) \times (m - 4)$  и задаются в виде матриц:

$$D = \begin{pmatrix} 20 + \frac{k}{d} & -8 & 1 & \dots & 0 \\ -8 & 20 + \frac{k}{d} & -8 & \dots & 0 \\ 1 & -8 & 20 + \frac{k}{d} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 20 + \frac{k}{d} \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & -8 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -8 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -8 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты в «контуре»  $B$  матрицы  $A$ , находящиеся в двух первых и последних строках, в двух первых и последних столбцах, как было отмечено, определяются граничными условиями.

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений относительно прогиба плиты  $w_i$  проведем численно с учетом симметрии матрицы  $A$ . Для реализации решения разработана программа с использованием среды IDE PyCharm Community (рис. 5). При этом входными параметрами являются следующие: модуль деформации лесного грунта, длина и ширина плиты, число узлов сетки по длине и по ширине плиты, толщина плиты, модуль упругости и коэффициент Пуассона ее материала, условия закрепления по краям плиты, внешняя нагрузка в выбранных узлах сетки. К выходным параметрам относят: оценку прогиба плиты и осадки грунта в узлах сетки, оценку напряжений в узлах сетки.

Перед проведением вычислительного эксперимента программа была протестирована

на корректность. Для этого результат расчета (рис. 6) при точечной нагрузке вблизи центра на сетке с 14×14 внутренними узлами при условии жесткой заделки по контуру сравнили с точным решением, известным для такого случая. Отклонение расчетных данных от частного случая точного решения не превысило 5 %. Схожий результат получен и некоторыми другими авторами при иллюстрации разностного решения дифференциального уравнения прогиба плиты, в связи с чем был сделан вывод о корректности работы программы в плане составления разностных уравнений для приближенного решения задач.

Далее была выполнена серия расчетов, основные результаты которых приведены в табл. 2. Расчеты выполнены для дорожных матов 2000×4000 мм, нагрузка задана во внутренних узлах сетки в окрестности центра мата. Расчеты проведены для сетки 144×144 узла, условия закрепления: левый край закреплен шарнирно, для остальных краев приняты условия свободного провисания. Коэффициент постели почвогрунта рассчитан по формуле (6). Параметры синтетического материала:  $E_0 = 1,2$  ГПа,  $\mu = 0,3$ .

Табличные данные проиллюстрированы для лесного почвогрунта III категории (слабонесущий) и II категории (средней прочности) на рис. 7.

Графики на рис. 8 иллюстрируют процентное снижение глубины колеи, образующейся на «композитном» волокне, укрепленном синтетическим матом.

Обработка расчетных данных позволила получить уравнение, применимое для оценки глубины колеи, образующейся под воздействием движителя, на волокне, укрепленном синтетическим матом

$$h = \left( 0,463 - 8,23H_0 + 41,6H_0^2 \right) \frac{P}{p_s}, \quad (29)$$

где  $p$  — среднее давление движителя, МПа;  
 $p_s \approx 0,1E$  несущая способность грунта, МПа;  
 $H_0$  — толщина синтетического мата, м.

Результаты расчета по формуле (29) для двух типов лесного почвогрунта проиллюстрированы на рис. 9.

Также для практики полезно оценить требуемую толщину дорожного мата, обеспечивающего соблюдение условия экологичности с учетом соотношения среднего давления движителя и несущей способности лесного почвогрунта. Для этого уравнение (29) решается при фиксированном значении глубины колеи  $h = 0,2$  м относительно толщины синтетического мата  $H_0$ . Результаты расчетов, для удобства выраженные в миллиметрах, приведены на рис. 10.

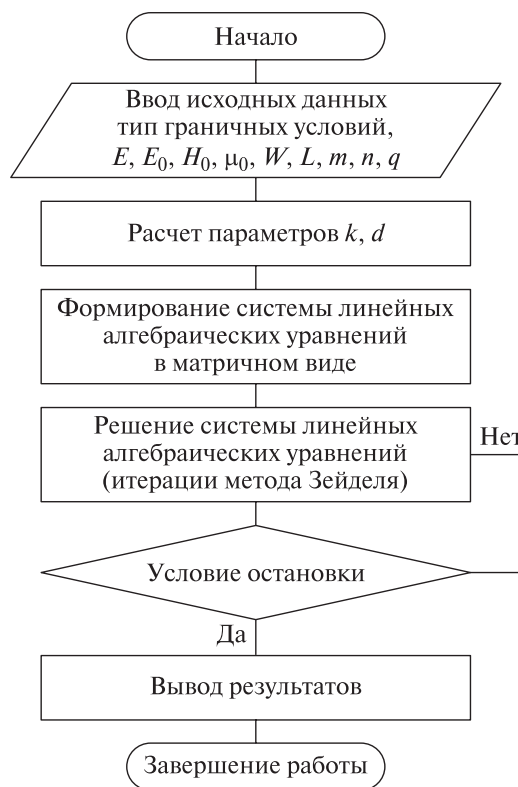


Рис. 5. Алгоритм работы программы для расчета показателей воздействия движителя лесной машины на синтетический мат

Fig. 5. Algorithm of the program for calculating the indicators of the impact of the forest machine mover on the synthetic mat

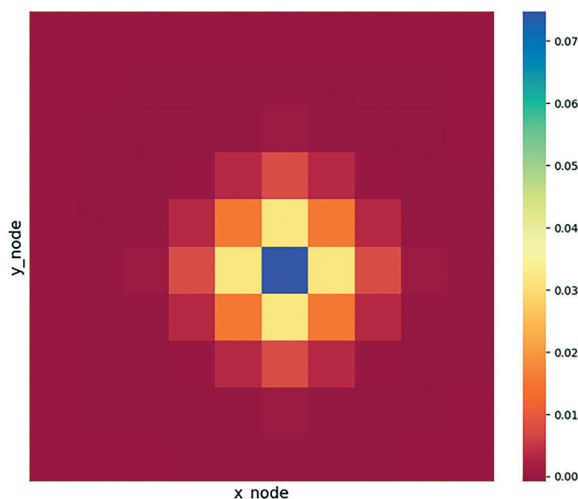


Рис. 6. Результаты расчета по разработанной программе, реализующей конечно-разностную схему решения задачи по определению прогиба плиты

Fig. 6. The results of the calculation according to the developed program, which implements a finite-difference scheme for solving the problem of determining the deflection of the plate



### Основные результаты расчетов прогиба синтетического дорожного мата под воздействием движителя лесной машины

The main results of calculations of the deflection of a synthetic road matting under the influence of a forest machine

Толщина синтетического мата $H_0$ , мм	Давление движителя $p$ , МПа								
	III категория лесного грунта			II категория лесного грунта			I категория лесного грунта		
	0,4	0,07	0,1	0,4	0,07	0,1	0,4	0,07	0,1
0	37,2	65	92,9	11,6	20,3	29,1	2,2	3,9	5,6
20	32,4	56,6	80,9	11,1	19,4	27,7	2,2	3,9	5,6
40	19,8	34,7	49,5	8,7	15,2	21,7	2,1	3,7	5,2
102	5,2	9,1	13	3	5,2	7,5	1,2	2,1	3

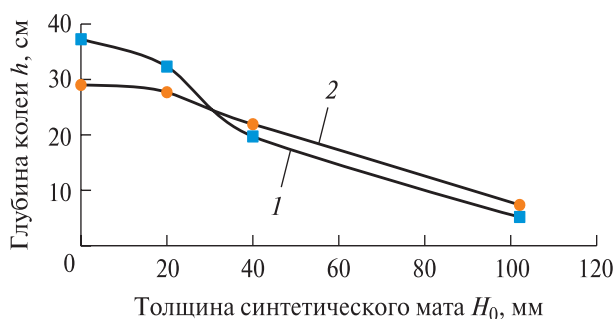


Рис. 7. Результаты расчета по конечно-разностной схеме (глубина колеи при варьировании толщины синтетического мата, воздействие движителя по центру): 1 — III категория грунта,  $p = 0,04$  МПа; 2 — II категория грунта,  $p = 0,1$  МПа

Fig. 7. The results of the calculation according to the finite difference scheme (track depth with varying thickness of the synthetic mat, the effect of the mover in the center): 1 — III category of soil,  $p = 0,04$  МПа; 2 — II category of soil,  $p = 0,1$  МПа

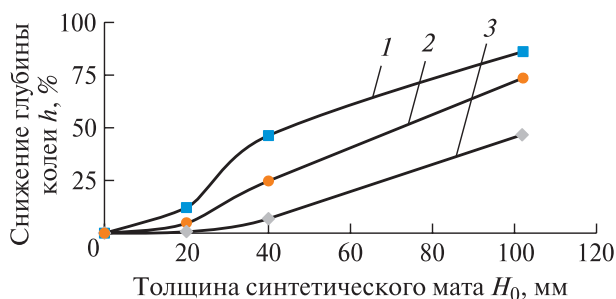


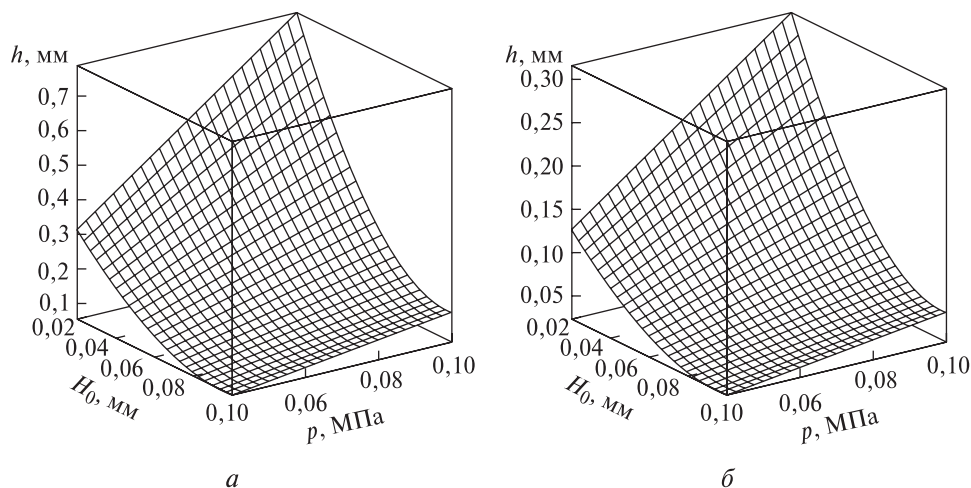
Рис. 8. Снижение глубины колеи, образующейся на волоке, укрепленном синтетическим матом: 1 — III категория грунта; 2 — II категория грунта; 3 — I категория грунта

Fig. 8. Reducing the depth of the track formed on the fiber reinforced with synthetic mat: 1 — evaluative category primer; 2 — evaluative category primer; 3 — evaluative category primer

При использовании традиционного приема обеспечения работоспособности лесных машин на лесосеках со слабонесущими почвогрунтами, а также сохранения объектов биоразнообразия, заключающегося в расширении сети трелевочных волоков и технологических коридоров, достаточно сложно выполнить требования приказа Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации № 23 от 17.01.2022 г., в частности «Общая площадь трасс волоков и дорог должна составлять при сплошных рубках не более 20 %, при выборочных — не более 15 % площади лесосеки. На лесосеках сплошных рубок, проводимых с применением многооперационной техники, допускается увеличение площади волоков и дорог до 30 % общей площади лесосеки». Невыполнение этих требований приводит к штрафным санкциям, которые существенно снижают и без того невысокую рентабельность лесозаготовительного производства.

При использовании сборно-разборных дорожных конструкций из современных пластиковых матов после их демонтажа на почвогрунте практически не остается следов воздействия техники, в отличие от машин, проходящих непосредственно по сырому почвогрунту. Как показывает практика, оснащение колесных машин специальными моногусеницами или использование гусеничных машин на слабонесущем почвогрунте в теплый период года вместо колесных не решает проблему.

Широко известен и распространен вариант укрепления трелевочных волоков и технологических коридоров на слабонесущих почвогрунтах порубочными остатками [26]. У такого варианта есть и отрицательные моменты: во-первых, раздробленные и вдавленные в почвогрунт порубочные остатки быстро перегнивают и удобряют почвенный горизонт далеко не везде. Например, в лесах на вечной мерзлоте,



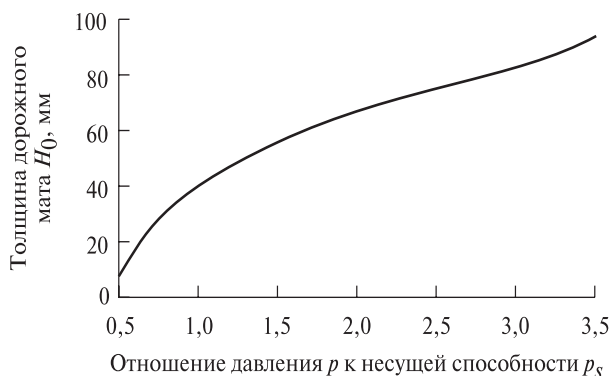
**Рис. 9.** Оценка глубины колеи, образующейся под воздействием движателя: *a* — лесной почвогрунт III категории; *б* — лесной почвогрунт II категории  
**Fig. 9.** Assessment of the depth of the track formed under the influence of the mover: *a* — forest soil of category III; *б* — forest soil of category II

которых в нашей стране около 60 %, ввиду крайне бедной биоты почвенного горизонта, эта древесина перегнивает крайне медленно, и становится лесным горючим материалом, очагом деструкции мерзлоты [27]. Во-вторых, такой вариант не применим, если требуется по кратчайшему маршруту пересечь ключевой биотоп или другое обводненное понижение.

Отсюда очевидно, что использование сборно-разборных дорожных конструкций из современных пластиковых матов для сети трелевочных волоков и технологических коридоров в определенных природно-производственных условиях является практически безальтернативным.

Причем представленный в настоящей работе анализ показывает, что для транспортировки матов в условиях лесосеки наилучшим образом подходят форвардеры большой грузоподъемности (наиболее популярные у лесозаготовителей РФ [28, 29]), которые помимо транспортировки могут обеспечить погрузку и выгрузку элементов временного покрытия, а также его укладку с помощью гидроманипулятора.

Для строительства (сборки) покрытия на 1 км трелевочного волока (шириной 4,5 м), способного выдержать воздействие тяжелых лесных машин, массой до 40 т потребуется 500 матов серии «Н» с габаритными размерами 2×4 м. Трудоемкость монтажа матов на 1 км сети трелевочных волоков составит приблизительно два рабочих дня силами трех человек. Состав бригады для укладки матов: рабочий — 2 чел.; оператор форвардера — 1 чел. Время монтажа одного мата 2000×4000 составляет



**Рис. 10.** Толщина дорожного мата, обеспечивающего соблюдение критерия экологичности трелевки, в зависимости от соотношения среднего давления движателя и несущей способности лесного почвогрунта

**Fig. 10.** The thickness of the road mat that ensures compliance with the criteria of environmental friendliness of the skidding, depending on the ratio of the average pressure of the mover and the bearing capacity of the forest soil

от 1 до 3 мин. Сборка коридора длиной 100 м, шириной 4 м — около 4 ч.

Еще одним вариантом являются вездеходные машины, также оснащенные манипулятором или краном. Машины такой конструкции используются, например, для доставки посадочного материала в трудных условиях, а также при пожаротушении, т. е. при достаточной площади грузовой платформы, поэтому могут быть использованы и для решения поставленной задачи [30, 31].

Уменьшения потребного количества матов для сборно-разборного покрытия и снижения трудоемкости монтажно-демонтажных работ можно добиться с помощью решения оптимизационных задач для конкретных лесосек — по площади, почвенно-грунтовым условиям, наличию и особенностям размещения неэксплуатационных площадей, финансовым возможностям лесозаготовительного предприятия.

Анализ литературных источников показывает, что различные авторы по-разному подходят к вопросам моделирования и решения оптимизационных задач. При этом в качестве критериев оптимизации устанавливаются не только экономические, но и экологические факторы. Например, в статьях [32, 33] предложен метод моделирования транспортных путей вывоза леса с лесосеки с помощью гиперсети. Предполагается, что модель лесосеки разбита на элементарные участки, с которых необходимо собрать заготовленные лесоматериалы. Гиперсеть представляет собой двухуровневую структуру, нижний уровень которой является гиперграфом, а верхний — ориентированным графом. Вершины гиперграфа нижнего уровня соответствуют элементарным участкам (позициям сбора пачек лесоматериалов), а гиперребра — возможным комбинациям близко расположенных участков, лесоматериалы с которых можно вывезти за один проход трелевочного трактора.

Узлы ориентированного графа верхнего уровня взаимно однозначно соответствуют вершинам гиперграфа нижнего уровня, в дуги — путям прохода форвардера между местами сбора лесоматериалов, направленными в сторону пункта его сбора. Критерием оптимальности служит уменьшение доли участков с глубокой или недопустимо глубокой колеей, которая образуется при движении трелевочного трактора. Перспективным направлением дальнейшего развития этого подхода видится в применении геометрических методов для разбиения лесосеки на участки сбора пачек лесоматериалов и связывания их между собой в единую транспортную сеть.

В работах [34–36] предложен вариант оптимизации с разбиением арендной базы, или лесосеки, на центры запаса леса с выделением неэксплуатационных участков, например ключевых биотопов, прогалин, вырубок. Однако составление и решение оптимизационных задач размещения сети трелевочных волоков и технологических коридоров с ездовой поверхностью из сборно-разборных пластиковых матов по критериям снижения потребного количества матов и трудоемкости монтажно-демонтажных

работ и с учетом практически полного отсутствия требований учета несущей способности почвогрунтов на отдельных участках их трасс выходит за рамки данного исследования, оставаясь задачей будущего.

Помимо выкладки сборно-разборного покрытия из пластиковых матов на сети трелевочных волоков и технологических коридоров весьма целесообразной является выкладка сборно-разборного покрытия на площадках верхних складов (погрузочных пунктов), где почвогрунты подвергаются максимальному негативному воздействию, даже больше, чем на магистральных трелевочных волоках.

## Выводы

Реализация математической модели взаимодействия колесного штампа-двигателя с двуслойной опорной поверхностью, состоящей из синтетического дорожного мата и подстилающего лесного почвогрунта, показала, что связь глубины образующейся колеи и толщины дорожного мата, носит квадратичный характер.

Оценка требуемой толщины дорожного мата, обеспечивающего соблюдение условия экологичности и проходимости техники, показала, что при толщине дорожного мата 40 мм допустимо соотношение допустимого давления и несущей способности грунта 1:1 (глубина колеи не превысит 20 см) (известные ранее рекомендации ограничивали это соотношение величиной 1:2, в противном случае колея превысит 20 см).

Установлено, что использование дорожных матов целесообразно при укреплении лесных дорог. При использовании дорожных матов толщиной 102 мм расчетное значение глубины колеи на лесных почвогрунтах II (средней прочности) и III (слабонесущие) категории снижается на величину до 75 %; на прочных лесных грунтах I категории снижение оценивается в 50 %.

*Работа выполнена в рамках научной школы «Инновационные разработки в области лесозаготовительной промышленности и лесного хозяйства». Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-16-00092, <https://rscf.ru/project/23-16-00092/>.*

## Список литературы

- [1] Григорьева О.И. Эффективность транспортно-технологических систем для лесного хозяйства // Транспортные и транспортно-технологические системы: Материалы Междунар. науч.-техн. конф., Тюмень,

- 19 апреля 2018 г / под ред. Н.С. Захарова. Тюмень: Изд-во Тюменского индустриального университета, 2018. С. 79–83.
- [2] Злобина Н.И., Зеликов В.А., Григорьева О.И., Гурьев А.Ю. Определение пропускной способности лесовозных автомобильных дорог эмпирическим путем с учетом безопасности дорожного движения // Безопасность и охрана труда в лесозаготовительном и деревообрабатывающем производствах, 2022. № 5. С. 38–65.
- [3] Давтян А.Б., Григорьева О.И., Григорьев И.В. Энергетические лесные плантации для эффективного вовлечения в оборот земель сельскохозяйственного назначения в РФ // Лесная инженерия, материаловедение и дизайн: Материалы 86-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, науч. сотр. и аспирантов (с междунар. участием), Минск, 31 января – 12 февраля 2022 г. Минск, 2022. С. 42–45.
- [4] Каляшов В.А., Григорьев И.В., Григорьева О.И. Инновационные методы освоения горных лесосек // Инновации в химико-лесном комплексе: тенденции и перспективы развития: Материалы Всерос. науч.-практ. конф., Красноярск, 06–07 июня 2022 г. / под ред. Ю.А. Безруких, Е.В. Мельникова. Красноярск: Изд-во Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, 2022. С. 88–92.
- [5] Григорьева О.И., Григорьев М.Ф., Григорьев И.В. Анализ естественного лесовозобновления в Алексеевском участковом лесничестве Республики Саха (Якутия) // Forest Engineering: Материалы науч.-практ. конф. с междунар. участием, Якутск, 30–31 мая 2018 г. Якутск: Издательский дом СВФУ, 2018. С. 72–75.
- [6] Шапиро В.Я., Григорьев И.В., Григорьева О.И., Иванов В.А. Исследование закономерностей разрушения грунта при работе комбинированных грунтометов для тушения лесных пожаров // Системы. Методы. Технологии, 2017. № 1 (33). С. 146–151
- [7] Ковалев Р.Н., Еналеева-Бандура И.М., Баранов А.Н., Григорьева О.И., Григорьев И.В. Математическая модель определения общей стоимости ресурсов лесных земель с учетом уровня развития лесотранспортной сети // Resources and Technology, 2022. Т. 19. № 4. С. 102–117.
- [8] Каляшов В.А., Григорьева О.И., Григорьев И.В. Перспективные варианты восстановления лесов на склонах // Вестник АГАТУ, 2022. № 1 (5). С. 86–96.
- [9] Злобина Н.И., Зеликов В.А., Григорьева О.И., Новгородов Д.В. Обоснование пропускной способности по критерию безопасности дорожного движения на лесовозных автомобильных дорогах // Безопасность и охрана труда в лесозаготовительном и деревообрабатывающем производствах, 2022. № 4. С. 19–35.
- [10] Злобина Н.И., Зеликов В.А., Григорьева О.И., Новгородов Д.В. Экспериментальное обоснование выбора скорости движения по лесовозной дороге в качестве показателя безопасности дорожного движения // Безопасность и охрана труда в лесозаготовительном и деревообрабатывающем производствах, 2022. № 6. С. 27–42.
- [11] Григорьева О.И., Нгуен Ф.З. Лесные плантации для сырьевого обеспечения деревоперерабатывающих предприятий // Повышение эффективности лесного комплекса: Материалы III Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Петрозаводск, 30 мая 2017 г. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского государственного университета, 2017. С. 59–61.
- [12] Kozlov V.G., Skrypnikov A.V., Sushkov S.I., Kruchinin I.N., Grigorev I.V., Nikiforov A.A., Pilnik Y.N., Teppoev A.V., Lavrov M., Timokhova O.M. Enhancing quality of road pavements through adhesion improvement // J. of the Balkan Tribological Association, 2019, t. 25, no. 3, pp. 678–694.
- [13] Grigoreva O., Runova E., Ivanov V., Alyabyev A., Hertz E., Voronova A., Shadrina S., Grigorev I. Influence of different forest management techniques on the quality of wood // J. of Renewable Materials, 2021, t. 9, no. 12, pp. 2175–2188.
- [14] Рудов С.Е., Григорьев И.В., Григорьева О.И., Григорьев М.Ф., Григорьева А.И. Эффективность лесопользования в криолитозоне // Энергоэффективность и энергосбережение в современном производстве и обществе: Материалы Междунар. науч.-практ. конф., Воронеж, 09–10 июня 2020 года. Воронеж: Изд-во Воронежского государственного аграрного университета имени Императора Петра I, 2020. С. 460–463.
- [15] Григорьева О.И. Приборные комплексы для изучения поверхности лесосек // Повышение эффективности лесного комплекса. Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Петрозаводск, 22–23 мая 2018 г. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского государственного университета, 2018. С. 47–49.
- [16] Григорьева О.И. Перспективные направления повышения эффективности проведения рубок ухода за лесом // Повышение эффективности лесного комплекса. Материалы третьей Всероссийской науч.-практ. конф. с международным участием, Петрозаводск, 30 мая 2017 г. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского государственного университета, 2017. С. 56–58.
- [17] Григорьев И.В., Григорьева О.И. Эффективность лесопользования в России // Энергия: экономика, техника, экология, 2016. № 5. С. 24–30.
- [18] Beskopylny A., Kadomtseva E., Strelnikov G. Numerical study of the stress-strain state of reinforced plate on an elastic foundation by the Bubnov-Galerkin method // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2017, v. 90(1), p. 012017. DOI:10.1088/1755-1315/90/1/012017
- [19] Beskopylny A., Veremeenko A., Kadomtseva E., Shilov A. Dynamic response of a plate laying on elastic base during the impact of a conical indenter // MATEC Web of Conferences, 2018, p. 01001. DOI: 10.1051/mateconf/201819601001
- [20] Beskopylny A.N., Kadomtseva E.E., Strelnikov G.P., Berdnik Y.A. Stress-strain state of reinforced bimodulus beam on an elastic foundation // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2017, v. 90(1), p. 012064. DOI: 10.1088/1755-1315/90/1/012064
- [21] Beskopylny A.N., Veremeenko A.A., Kadomtseva E.E., Beskopylnaia N.I. The impact of the conical indenter on a plate laying on a winkler foundation // Materials Science Forum, 2018, t. 931, pp. 84–90.
- [22] Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н., Бердник Я.А. Расчет на жесткость пластины, подкрепленной ребрами, на упругом основании методом Бубнова — Галеркина // Инженерный вестник Дона, 2016. № 3 (42). С. 61.

- [23] Кадомцева Е.Э., Бескопыльный А.Н., Бескопыльная Н.И., Бердник Я.А. Расчет на жесткость гофрированной пластины на упругом основании методом Бубнова — Галеркина // Научное обозрение. Технические науки, 2016. № 6. С. 33–35.
- [24] Кадомцева Е.Э., Сикачева Н.В., Кирсанов Ю.А. Расчет на прочность гофрированной тонкой пластины на упругом основании обратным методом // Инженерный вестник Дона, 2017. № 2 (45). С. 150.
- [25] Кадомцева Е.Э., Сикачева Н.В., Кирсанов Ю.А. Расчет на прочность пластины, подкрепленной ребрами жесткости, на упругом основании обратным методом // Инженерный вестник Дона, 2018. № 1 (48). С. 103.
- [26] Григорьева О.И. Новая машина для очистки лесосек // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика, 2014. Т. 2. № 5–3 (10–3). С. 96–99.
- [27] Григорьев Г.В., Дмитриева И.Н., Григорьев И.В., Каляшов В.А., Рудов С.Е., Иванов В.А. Проблемы и перспективы лесозаготовительного производства в условиях районов распространения вечной мерзлоты // Системы. Методы. Технологии, 2021. № 3 (51). С. 59–67.
- [28] Рудов С.Е., Григорьев И.В. Правила эффективной эксплуатации форвардеров // Повышение эффективности лесного комплекса: Материалы VII Всерос. нац. науч.-практ. конф. с междунар. участием, Петрозаводск, 25 мая 2021 г. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского государственного университета, 2021. С. 166–168.
- [29] Григорьев И.В., Петров М.Е. Дополнительные технические опции для повышения безопасности, надежности и энергоэффективности лесных машин // Вестник АГАТУ, 2021. № 3 (3). С. 73–81.
- [30] Тетеревлева Е.В., Гринько О.И., Григорьева О.И. Транспортно-технологические машины для тушения лесных пожаров на базе колесных вездеходов // Транспортные и транспортно-технологические системы. Материалы Междунар. науч.-техн. конф., Тюмень, 22 октября 2020 г. / под ред. Н.С. Захарова. Тюмень: Изд-во Тюменского индустриального университета, 2020. С. 374–377.
- [31] Чемшикова Ю.М., Давтян А.Б., Григорьева О.И. Транспортно-технологические системы для лесоразведения на базе гусеничных вездеходов // Транспортные и транспортно-технологические системы. Материалы Междунар. науч.-техн. конф., Тюмень, 22 октября 2020 г. / под ред. Н.С. Захарова. Тюмень: Изд-во Тюменского индустриального университета, 2020. С. 400–403.
- [32] Rego G.E., Voronov R.V., Grigoreva O.I. Algorithms for calculating schemes of transport routes in a felling area // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2. Ser. «II All-Russian Scientific-Technical Conference “Digital Technologies in Forest Sector”» 2021. С. 012025.
- [33] Соколов А.П., Селиверстов А.А., Суханов Ю.В., Сенькин В.А. О влиянии частичной автоматизации управления манипуляторами на эргономические показатели лесозаготовительных машин // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 1. С. 139–152. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-1-139-152
- [34] Воронова А.М., Воронов Р.В., Пискунов М.А. Моделирование схемы волоков при помощи покрытия гиперсети взвешенным корневым деревом // Ученые записки Петрозаводского государственного университета, 2012. № 2 (123). С. 114–117.
- [35] Григорьев И.В., Жукова А.И. Координатно-объемная методика трассирования при освоении лесосек трелевкой // ИзВУЗ Лесной журнал, 2004. № 4. С. 39–44.
- [36] Rudov S.E., Voronova A.M., Chemshikova J.M., Teterlevleva E.V., Kruchinin I.N., Dondokov Yu.Zh., Khaldeeva M.N., Burtseva I.A., Danilov V.V., Grigorev I.V. Theoretical approaches to logging trail network planning: increasing efficiency of forest machines and reducing their negative impact on soil and terrain // Asian J. of Water, Environment and Pollution, 2019. Т. 16. № 4. С. 61–75.

## Сведения об авторах

**Зорин Максим Владимирович** — аспирант, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова» (ВГЛТУ), [mr.maks489@ya.ru](mailto:mr.maks489@ya.ru)

**Хитров Егор Германович** — д-р техн. наук, доцент Высшей школы интеллектуальных систем и суперкомпьютерных технологий, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», [yegorkhitrov@gmail.com](mailto:yegorkhitrov@gmail.com)

**Куницкая Ольга Анатольевна** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Технология и оборудование лесного комплекса», ФГБОУ ВО «Арктический государственный агротехнологический университет», [ola.ola07@mail.ru](mailto:ola.ola07@mail.ru)

**Елисеев Павел Сергеевич** — ассистент кафедры «Транспортно-технологические средства и оборудование лесного комплекса», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), [peliseev@bmstu.ru](mailto:peliseev@bmstu.ru)

**Юдилевич Александр Михайлович** — аспирант, ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», [kafedra388@mail.ru](mailto:kafedra388@mail.ru)

**Клубничкин Владислав Евгеньевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Транспортно-технологические средства и оборудование лесного комплекса», ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), [vklubnichkin@mgul.ac.ru](mailto:vklubnichkin@mgul.ac.ru)

Поступила в редакцию 04.05.2024.

Одобрено после рецензирования 01.11.2024.

Принята к публикации 14.11.2024.

# FINITE-DIFFERENCE SCHEME TO CALCULATE ROAD MATTING DEFLECTION UNDER FOREST FORWARDER

M.V. Zorin<sup>1</sup>, E.G. Khitrov<sup>2✉</sup>, O.A. Kunitskaya<sup>3</sup>, P.S. Eliseev<sup>4</sup>, A.M. Yudilevich<sup>5</sup>, V.E. Klubnichkin<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State Forestry Engineering University named after G.F. Morozov, 8, Timiryazev st., 394087, Voronezh, Russia

<sup>2</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politechnicheskaya st., 195251, St. Petersburg, Russia

<sup>3</sup>Arctic State Agrotechnological University, 3, Sergelyakhskoye highway, 3 km, 677007, Yakutsk, Republic of Sakha (Yakutia), Russia

<sup>4</sup>BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

<sup>5</sup>Bratsk State University, 40, Makarenko st., 665709, Bratsk, Irkutsk reg., Russia

yegorkhitrov@gmail.com

A mathematical model of the interaction of a wheeled drive vehicle with a two-layer support surface consisting of a synthetic road matting and an underlying forest soil is considered. A model of a deformable plate placed on a pliable (Winkler) base is proposed. A finite-difference scheme is proposed, assuming an arbitrary load distribution over the grid nodes, to solve the differential equation of plate deflection (and base precipitation), as well as several options for fixing boundary nodes. A Python program has been developed to implement the proposed model. A computational experiment was conducted using this program. The deviation of the calculated data from the particular case of the exact solution did not exceed 5%. The processing of the calculated data made it possible to obtain an equation convenient for estimating the depth of the track formed by a vehicle.

**Keywords:** temporary forest roads, strengthening of skidding drags, collapsible road surfaces, logging, skidding, land transport of forests

**Suggested citation:** Zorin M.V., Khitrov E.G., Kunitskaya O.A., Eliseev P.S., Yudilevich A.M., Klubnichkin V.E. *Konechno-raznostnaya skhema dlya rascheta progiba dorozhnogo mata pod vozdeystviem dvizhitelya lesnoy mashiny* [Finite-difference scheme to calculate road matting deflection under forest forwarder]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2025, vol. 29, no. 1, pp. 96–111. DOI: 10.18698/2542-1468-2025-1-96-111

## References

- [1] Grigor'eva O.I. *Effektivnost' transportno-tekhnologicheskikh sistem dlya lesnogo khozyaystva* [Efficiency of transport and technological systems for forestry]. *Transportnye i transportno-tekhnologicheskie sistemy: mater. Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Transport and transport and technological systems: materials of the International scientific and technical conference], Tyumen, April 19, 2018. Ed. N.S. Zakharov. Tyumen: Tyumen Industrial University, 2018, pp. 79–83.
- [2] Zlobina N.I., Zelikov V.A., Grigor'eva O.I., Gur'ev A.Yu. *Opreделение пропускной способности лесовозных автомобилей на дорогах эмпирическим путем с учетом безопасности дорожного движения* [Determining the capacity of logging roads empirically, taking into account road safety]. *Bezopasnost' i okhrana truda v lesozagotovitel'nom i derevoobrabatyvayushchem proizvodstvakh* [Occupational Safety and Health in Logging and Woodworking Industries], 2022, no. 5, pp. 38–65.
- [3] Davtyan A.B., Grigor'eva O.I., Grigor'ev I.V. *Energeticheskie lesnye plantatsii dlya effektivnogo вовлечения в оборот земель сельскохозяйственного назначения в РФ* [Energy forest plantations for the efficient use of agricultural land in the Russian Federation]. *Lesnaya inzheneriya, materialovedenie i dizayn: mater. 86-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiem)* [Forest engineering, materials science and design: materials of the 86th scientific and technical conference of the faculty, researchers and postgraduate students (with international participation)], Minsk, January 31–February 12, 2022. Minsk, 2022, pp. 42–45.
- [4] Kalyashov V.A., Grigor'ev I.V., Grigor'eva O.I. *Innovatsionnye metody osvoeniya gornyykh lesosek* [Innovative methods for developing mountain logging areas]. *Innovatsii v khimiko-lesnom komplekse: tendentsii i perspektivy razvitiya. Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Innovations in the chemical and forestry complex: trends and development prospects. Materials of the All-Russian scientific and practical conference], Krasnoyarsk, June 6–7, 2022. Eds. Yu.A. Bezrukih, E.V. Melnikova. Krasnoyarsk: Siberian State University of Science and Technology named after Academician M.F. Reshetneva, 2022, pp. 88–92.
- [5] Grigor'eva O.I., Grigor'ev M.F., Grigor'ev I.V. *Analiz estestvennogo lesovozobnovleniya v Alekseevskom uchastkovom lesnichestve Respubliki Sakha (Yakutiya)* [Analysis of natural reforestation in the Alekseevsky district forestry of the Republic of Sakha (Yakutia)]. *Forest Engineering: mater. nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Forest Engineering: materials of the scientific and practical conference with international participation], Yakutsk, Russia, May 30–31, 2018. Yakutsk: Publishing house of NEFU, 2018, pp. 72–75.

- [6] Shapiro V.Ya., Grigor'ev I.V., Grigor'eva O.I., Ivanov V.A. *Issledovanie zakonomernostey razrusheniya grunta pri rabote kombinirovannykh gruntometov dlya tusheniya lesnykh pozharov* [Study of soil destruction patterns during operation of combined soil throwers for extinguishing forest fires]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii* [Systems. Methods. Technologies], 2017, no. 1 (33), pp. 146–151.
- [7] Kovalev R.N., Enaleeva-Bandura I.M., Baranov A.N., Grigor'eva O.I., Grigor'ev I.V. *Matematicheskaya model' opredeleniya obshchey stoimosti resursov lesnykh zemel's uchetom urovnya razvitiya lesotransportnoy seti* [Mathematical model for determining the total value of forest land resources taking into account the level of development of the forest transport network]. *Resources and Technology* [Resources and Technology], 2022, v. 19, no. 4, pp. 102–117.
- [8] Kalyashov V.A., Grigor'eva O.I., Grigor'ev I.V. *Perspektivnye varianty vosstanovleniya lesov na sklonakh* [Promising options for forest restoration on slopes]. *Vestnik AGATU* [Bulletin of AGATU], 2022, no. 1 (5), pp. 86–96.
- [9] Zlobina N.I., Zelikov V.A., Grigor'eva O.I., Novgorodov D.V. *Obosnovanie propusknoy sposobnosti po kriteriyu bezopasnosti dorozhnogo dvizheniya na lesovoznykh avtomobil'nykh dorogakh* [Justification of the throughput capacity based on the road safety criterion on logging roads]. *Bezopasnost' i okhrana truda v lesozagotovitel'nom i derevoobrabatvayushchem proizvodstvakh* [Occupational Safety and Health in Logging and Woodworking Industries], 2022, no. 4, pp. 19–35.
- [10] Zlobina N.I., Zelikov V.A., Grigor'eva O.I., Novgorodov D.V. *Ekspperimental'noe obosnovanie vybora skorosti dvizheniya po lesovoznoy doroge v kachestve pokazatelya bezopasnosti dorozhnogo dvizheniya* [Experimental justification for the choice of travel speed on a logging road as an indicator of road safety]. *Bezopasnost' i okhrana truda v lesozagotovitel'nom i derevoobrabatvayushchem proizvodstvakh* [Occupational Safety and Health in Logging and Woodworking Industries], 2022, no. 6, pp. 27–42.
- [11] Grigor'eva O.I., Nguen F.Z. *Lesnye plantatsii dlya syr'evogo obespecheniya derevopererabatyvayushchikh predpriyatiy* [Forest plantations for raw material supply of wood processing enterprises]. *Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa: Mater. III Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Improving the efficiency of the forest complex: materials. III All-Russian scientific and practical conference with international participation], Petrozavodsk, May 30, 2017. Petrozavodsk: Petrozavodsk State University, 2017, pp. 59–61.
- [14] Rudov S.E., Grigor'ev I.V., Grigor'eva O.I., Grigor'ev M.F., Grigor'eva A.I. *Effektivnost' lesopol'zovaniya v kriolitozone* [Efficiency of forest management in the cryolithozone]. *Energoeffektivnost' i energosberezhenie v sovremennom proizvodstve i obshchestve: mater. Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Energy efficiency and energy saving in modern production and society: Proc. of the International scientific and practical conference], Voronezh, June 9–10, 2020. Voronezh: Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter I, 2020, pp. 460–463.
- [15] Grigor'eva O.I. *Pribornye komplekсы dlya izucheniya poverkhnosti lesosek* [Instrumental complexes for studying the surface of cutting areas]. *Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa. Materialy IV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Improving the efficiency of the forest complex. Proceedings of the IV All-Russian scientific and practical conference with international participation], Petrozavodsk, May 22–23, 2018. Petrozavodsk: Petrozavodsk State University, 2018, pp. 47–49.
- [16] Grigor'eva O.I. *Perspektivnye napravleniya povysheniya effektivnosti provedeniya rubok ukhoda za lesom* [Promising directions for improving the efficiency of forest thinning]. *Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa. Materialy tret'ey Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Improving the efficiency of the forest complex. Proceedings of the third All-Russian scientific and practical conference with international participation], Petrozavodsk, May 30, 2017. Petrozavodsk: Petrozavodsk State University, 2017, pp. 56–58.
- [17] Grigor'ev I.V., Grigor'eva O.I. *Effektivnost' lesopol'zovaniya v Rossii* [Efficiency of forest management in Russia]. *Energiya: ekonomika, tekhnika, ekologiya* [Energy: economics, technology, ecology], 2016, no. 5, pp. 24–30.
- [22] Kadomtseva E.E., Beskopyl'nyy A.N., Berdnik Ya.A. *Raschet na zhestkost' plastiny, podkreplennoy rebrami, na uprugom osnovanii metodom Bubnova — Galerkina* [Calculation of the rigidity of a plate reinforced with ribs on an elastic foundation using the Bubnov — Galerkin method]. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don], 2016, no. 3 (42), p. 61.
- [23] Kadomtseva E.E., Beskopyl'nyy A.N., Beskopyl'naya N.I., Berdnik Ya.A. *Raschet na zhestkost' gofirovannoy plastiny na uprugom osnovanii metodom Bubnova — Galerkina* [Calculation of the rigidity of a corrugated plate on an elastic foundation using the Bubnov — Galerkin method]. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki* [Scientific Review. Technical Sciences], 2016, no. 6, pp. 33–35.
- [24] Kadomtseva E.E., Sikacheva N.V., Kirsanov Yu.A. *Raschet na prochnost' gofirovannoy tonkoy plastiny na uprugom osnovanii obratnym metodom* [Strength calculation of a corrugated thin plate on an elastic foundation using the inverse method]. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don], 2017, no. 2 (45), p. 150.
- [25] Kadomtseva E.E., Sikacheva N.V., Kirsanov Yu.A. *Raschet na prochnost' plastiny, podkreplennoy rebrami zhestkosti, na uprugom osnovanii obratnym metodom* [Strength calculation of a plate reinforced with stiffeners on an elastic foundation using the inverse method]. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don], 2018, no. 1 (48), p. 103.
- [26] Grigor'eva O.I. *Novaya mashina dlya ochistki lesosek* [New machine for clearing logging sites]. *Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika* [Current areas of scientific research in the 21st century: theory and practice], 2014, v. 2, no. 5–3 (10–3), pp. 96–99.
- [27] Grigor'ev G.V., Dmitrieva I.N., Grigor'ev I.V., Kalyashov V.A., Rudov S.E., Ivanov V.A. *Problemy i perspektivy lesozagotovitel'nogo proizvodstva v usloviyakh rayonov rasprostraneniya vechnoy merzloty* [Problems and prospects of logging production in permafrost areas]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii* [Systems. Methods. Technologies], 2021, no. 3 (51), pp. 59–67.

- [28] Rudov S.E., Grigor'ev I.V. *Pravila effektivnoy ekspluatatsii forvarderov* [Rules for efficient operation of forwarders]. *Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa: Mater. VII Vserossiyskoy natsional'noy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* [Improving the efficiency of the forestry complex: Proc. of the VII All-Russian National Scientific and Practical Conference with International Participation], Petrozavodsk, May 25, 2021. Petrozavodsk: Petrozavodsk State University, 2021, pp. 166–168.
- [29] Grigor'ev I.V., Petrov M.E. *Dopolnitel'nye tekhnicheskie optsii dlya povysheniya bezopasnosti, nadezhnosti i energoeffektivnosti lesnykh mashin* [Additional technical options for improving the safety, reliability and energy efficiency of forestry machines]. *Vestnik AGATU* [Bulletin of AGATU], 2021, no. 3 (3), pp. 73–81.
- [30] Terevleva E.V., Grin'ko O.I., Grigor'eva O.I. *Transportno-tekhnologicheskie mashiny dlya tusheniya lesnykh pozharov na baze kolesnykh vezdekhodov* [Transport and technological vehicles for extinguishing forest fires based on wheeled all-terrain vehicles]. *Transportnye i transportno-tekhnologicheskie sistemy. Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Transport and transport-technological systems. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference], Tyumen, October 22, 2020. Ed. N.S. Zakharov. Tyumen: Tyumen Industrial University, 2020, pp. 374–377.
- [31] Chemshikova Yu.M., Davtyan A.B., Grigor'eva O.I. *Transportno-tekhnologicheskie sistemy dlya lesorazvedeniya na baze gusenichnykh vezdekhodov* [Transport and technological systems for afforestation based on tracked all-terrain vehicles]. *Transportnye i transportno-tekhnologicheskie sistemy. Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Transport and transport-technological systems. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference], Tyumen, October 22, 2020. Ed. N.S. Zakharov. Tyumen: Tyumen Industrial University, 2020, pp. 400–403.
- [32] Sokolov A.P., Seliverstov A.A., Sukhanov Yu.V., Sen'kin V.A. *O vliyaniy chastichnoy avtomatizatsii upravleniya manipulyatorami na ergonomicheskie pokazateli lesozagotovitel'nykh mashin* [Ergonomic evaluation of forestry crane partial automation system]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2023, vol. 27, no. 1, pp. 139–152. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-1-139-152
- [33] Voronova A.M., Voronov R.V., Piskunov M.A. *Modelirovanie skhemy volokov pri pomoshchi pokrytiya giperseti vzveshennym kornevym derevom* [Modeling the scheme of dragways using the hypernet coverage with a weighted root tree]. *Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific Notes of Petrozavodsk State University], 2012, no. 2 (123), pp. 114–117.
- [34] Grigor'ev I.V., Zhukova A.I. *Koordinatno-ob'emnaya metodika trassirovaniya pri osvoenii lesesek trelevkoy* [Coordinate-volume method of tracing during the development of logging areas by skidding]. *Lesnoy Zhurnal* (Russian Forestry Journal), 2004, no. 4, pp. 39–44.
- [35] Rudov S.E., Voronova A.M., Chemshikova J.M., Terevleva E.V., Kruchinin I.N., Dondokov Yu.Zh., Khaldeeva M.N., Burtseva I.A., Danilov V.V., Grigorev I.V. *Theoretical approaches to logging trail network planning: increasing efficiency of forest machines and reducing their negative impact on soil and terrain* // *Asian J. of Water, Environment and Pollution*, 2019. T. 16. № 4. С. 61–75.

*The work was carried out within the framework of the scientific school «Innovative developments in the field of logging industry and forestry». The research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation No. 23-16-00092, <https://rscf.ru/project/23-16-00092/>.*

## Authors' information

**Zorin Maksim Vladimirovich** — pg., Voronezh State Forestry Engineering University named after G.F. Morozov, mr.maks489@ya.ru

**Khitrov Egor Germanovich** — Dr. Sci. (Tech.), Associate Professor, Sankt-Peterburgskiy politekhnicheskiiy universitet Petra Velikogo, yegorkhitrov@gmail.com

**Kunitskaya Ol'ga Anatol'evna** — Dr. Sci. (Tech.), Professor, Arctic State Agrotechnological University, ola.ola07@mail.ru

**Eliseev Pavel Sergeevich** — assistant, BMSTU (Mytishchi branch), peliseev@bmstu.ru

**Yudilevich Aleksandr Mikhaylovich** — pg., Bratsk State University, kafedra388@mail.ru

**Klubnichkin Vladislav Evgen'evich** — Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, BMSTU (Mytishchi branch), vklubnichkin@mgul.ac.ru

Received 04.05.2024.

Approved after review 01.11.2024.

Accepted for publication 14.11.2024.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи  
 Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов  
 Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article  
 The authors declare that there is no conflict of interest