Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 6. С. 178–188. ISSN 2542-1468
Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2023, vol. 27, no. 6, pp. 178–188. ISSN 2542-1468

УДК 681.518.22
DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-178-188
Шифр ВАК 1.2.2.; 2.3.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОСТОЯНИЙ ИЗУЧАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ ИЗМЕРЕНИЙ АНАЛИЗИРУЕМЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.А. Тесленко✉, М.Ю. Екимова

Научно-испытательный центр 4-го Государственного центрального межвидового полигона Министерства обороны Российской Федерации (полигон Капустин Яр) (4 ГЦМП МО РФ), Россия, 416550, Астраханская обл., г. Знаменск, ул. Королева, д. 1

teslenko.zhenka@yandex.ru

Рассмотрен вопрос, возникающий в процессе анализа физических систем. Приведено математическое описание состояний изучаемых объектов и процессов измерений их выходных параметров в процессе функционирования, заключающееся в установлении соответствующих математических моделей состояний, оценивании состояний и параметрической идентификации динамических систем на выбранных математических моделях по результатам измерений, получаемых в процессе испытаний и экспериментов. Установлены формы математических моделей состояний, математических моделей процессов измерений для идентификации параметров и оценивание состояний динамических систем, и сводится к определению состояний и неизвестных параметров заданных моделей. Определены оценки неизвестных параметров путем установления оптимального соответствия выбранной формы математической модели, составляющей глубину ее формализации, и параметров этой модели имеющимся априорным данным и результатам измерений. Приведено доказательство сформулированного утверждения для случая нелинейной модели состояний. Разработана математическая модель состояний динамической системы и модель измерений, представлена связь уравнений состояний и измерений в наиболее общем случае, заданная в виде аддитивной смеси полезного сигнала, описываемого нелинейным уравнением измерений и случайной помехи. Представлены исследования свойств моделей состояний и измерений с применением гауссовской и марковской аппроксимации. Рассмотрено последующее использование получаемых оценок состояний параметров динамических систем на моделях, являющихся адекватными реальным системам и процессам измерений и приведение их к условиям статистической однородности.

Ключевые слова: идентификация, параметры, динамическая система, математическая модель

Ссылка для цитирования: Тесленко Е.А., Екимова М.Ю. Математическое описание состояний изучаемых объектов и процессов измерений анализируемых физических систем // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 6. С. 178–188. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-178-188

Математическое описание состояний изучаемых объектов и процессов измерений их выходных параметров в процессе функционирования является одним из важнейших вопросов, возникающих в процессе анализа физических систем. Такое изучение заключается в установлении соответствующих математических моделей состояний, оценивании состояний и параметрической идентификации динамических систем на выбранных математических моделях по результатам измерений, получаемых в процессе испытаний и экспериментов.

Идентификация параметров и оценивание состояний динамических систем обычно предполагает, что выбраны определенные формы математических моделей состояний, математических моделей процессов измерений, и сводится к определению состояний и неизвестных параметров заданных моделей. Оценки неизвестных параметров определяются путем установления оптимального соответствия выбранной формы математической модели, определяющей глубину ее формализации, и параметров такой модели имеющимся априорным данным и результатам измерений. При этом всякий раз приходится учитывать то, что для выбранной математической модели можно определить оптимальные оценки параметров, однако это не является гарантией их пригодности в случаях, когда модель неверна.

Традиционно формализация моделей состояний динамических систем и процессов измерений их выходных параметров, которые бы в наибольшей степени позволяли учитывать возможные возмущающие факторы, предпринималась при углублении степени формализации используемых математических моделей за счет расширения их вектора параметров. Это в ряде случаев привело к противоположному эффекту, когда была утеряна практическая возможность решения задач параметрической идентификации динамических систем и оценивания их состояний. Основные причины такого противоречия связаны прежде всего с нарушением фундаментальных свойств наблюдаемости [1] используемых моделей при увеличении размерности вектора оцениваемых параметров.

Цель работы

Цель работы — описание математическими методами состояния изучаемых объектов и процессов измерений, а также сопутствующих выходных параметров в процессе функционирования различных физических систем.

Материалы и методы

Разработка математических моделей состояний и измерений. *Разработка математической модели состояний динамической системы.* Известны попытки использования в задачах параметрической идентификации реальных физических систем, являющихся, по существу, системами бесконечной размерности, упрощенных моделей состояний и измерений, т. е. таких, которые заведомо содержат погрешности формализации [2–5] и описывают лишь некоторую проекцию состояний реальных динамических систем или систем измерений. Однако известны возражения, не позволяющие в достаточной степени обосновать широкое практическое применение имеющихся теоретических разработок в области задач оценивания состояний и идентификации параметров моделей состояний реальных динамических систем и средств измерений. Такие возражения затрагивают в основном принимаемые допущения о параметрах законов распределения действующих возмущений в уравнениях состояний [2, 5, 6], случайных помех в уравнениях измерений, а также процедуры поиска оптимальных оценок параметров и состояний [4, 5].

В целях решения задач оценивания состояний и параметрической идентификации динамических систем необходимо прежде всего решить принципиальный вопрос о возможности адекватного описания реальных динамических систем математическими моделями конечной размерности. Здесь условие адекватного описания [7, 8] рассматривается в отношении интересующего вектора параметров и состояний ограниченной размерности. В связи с этим целесообразно рассмотреть следующее.

Всякая динамическая система, представленная в пространстве состояний бесконечной размерности, может быть адекватно описана относительно вектора фазовых координат конечной размерности математической моделью состояний, содержащей векторную марковскую составляющую формирующего шума.

Доказательство сформулированного утверждения приведено ниже для случая нелинейной модели состояний.

Пусть реальная нелинейная динамическая система описывается с точностью до векторного формирующего шума $\omega(t)$, имеющего нулевое среднее $E\{\omega(t)\} = 0$ и коррелированную матрицу интенсивностей — δ

$$\operatorname{cov}\left\{\omega(t)\cdot\omega^T(t-\tau)\right\} = Q_\omega\cdot\delta(t-\tau)$$

математической моделью вида

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t),t\right] + g\left[x(t),t\right]\cdot\omega(t), \tag{1}$$

где $f[\cdot]$ — векторная функция;

$x(t)$ — вектор фазовых координат в фазовом пространстве Ω_x^∞ бесконечной размерности;

$g[\cdot]$ — матрица интенсивностей формирующего шума.

Представив уравнение (1) в виде

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1\left[x(t),t\right]\\ f_2\left[x(t),t\right]\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}g_1\left[x(t),t\right]\\ g_2\left[x(t),t\right]\end{bmatrix}\cdot\omega(t),$$

можно выделить ту часть уравнений состояний, которая является моделью конечной размерности и адекватно описывает вектор параметров и состояний $x_1(t)\in\Omega_x^n$:

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left[x(t),t\right] + g_1\left[x(t),t\right]\cdot\omega(t).$$

Поскольку векторная функция $f_1[x(t), t]$ включает в себя полный вектор параметров и состояний $x(t)\in\Omega_x^\infty$, то может быть преобразована к виду

$$f_1\left[x(t),t\right] = f_1\left[x_1(t),x_2(t),t\right]. \tag{2}$$

Разложение этой функции в ряд Маклорена [9, 10] относительно вектора имеет вид

$$f_1\left[x(t),t\right] = f_1\left[x_1(t),0,t\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) + $$
$$+\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t)+\ldots$$

Для суммы членов разложения начиная со второго можно записать

$$b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t) \triangleq E\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t)+\ldots\right\}, \tag{3}$$

что позволяет выделить высокочастотную составляющую $g^*[x_1(t), t]\cdot\omega(t)$ формирующего шума:

$$g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t) \triangleq \frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) +$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t)+\ldots-b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t), \tag{4}$$

для которой первый статистический момент имеет вид $E\left\{g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t)\right\} = 0$, а векторная составляющая $u(t)$ является медленно изменяющимся марковским формирующим шумом.

С учетом соотношения (3) и выражения (4) модель (2) можно представить в виде

$$\dot{x}_1(t) = f\left[x_1(t), 0, t\right] + \\ +b\left[x_1(t), t\right]\cdot u(t) + g^*\left[x_1(t), t\right]\cdot \omega(t),$$

где функция $f[x_1(t), 0, t]$ не зависит от вектора $x_2(t)$ и поэтому справедливо следующее равенство:

$$f[x_1(t), 0, t] = f[x_1(t), t].$$

С учетом этого равенства уравнение модели состояний нелинейной динамической системы, адекватной реальной нелинейной динамической системе на векторе параметров и состояний конечной размерности $x_1(t)\subset x(t)$, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f\left[x_1(t), t\right] + b\left[x_1(t), t\right]\cdot u(t) + \\ &+g^*\left[x_1(t), t\right]\cdot \omega(t) + g_1\left[x_1(t), t\right]\cdot \omega(t) = \\ &= f\left[x_1(t), t\right] + b\left[x_1(t), t\right]\cdot u(t) + \tilde{g}\left[x_1(t), t\right]\cdot \omega(t),\end{aligned} \qquad (5)$$

что доказывает справедливость этого утверждения для нелинейных динамических систем.

Уравнение (5) для описания вектора $x_1(t)\in\Omega_x^n$ фазовых координат $x_1(t)\subset x(t)$ нелинейной динамической системы можно отождествить с динамической системой конечной размерности

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t), t\right] + b\left[x(t), t\right]\cdot u(t) + \\ +g\left[x_1(t), t\right]\cdot \omega(t), \qquad (6)$$

полагая, что вектор параметров и состояний $x(t)$ математической модели эквивалентен вектору $x_1(t)$ фазовых координат реальной динамической системы, а вектор $u(t)$ является медленно изменяющейся марковской составляющей с априорно неизвестными параметрами распределения.

Описание изучаемых объектов и процессов их функционирования математическими моделями с последующим решением задач оценивания состояний и идентификации параметров таких моделей по результатам измерений, получаемых в процессе испытаний и экспериментов, основывается на том, что оценки неизвестных параметров определяются путем установления оптимального соответствия выбранной формы математической модели, определяющей глубину ее формализации, и параметров такой модели имеющимся априорными данными и результатам измерений.

Понятие оптимальности предполагает, что установлены свойства действующих в процессе функционирования динамической системы случайных возмущений, а также случайной помехи в результатах измерений ее выходных параметров, что приводит к необходимости исследовать свойства указанных случайных факторов.

Разработка математических моделей измерений

Нелинейная модель изменений. Связь уравнений состояний и измерений в наиболее общем случае может быть задана в виде аддитивной смеси полезного сигнала, описываемого нелинейным уравнением измерений, и случайной помехи

$$y(t) = h[x(t), t] + v(t), \qquad (7)$$

где $h[\cdot]$ — векторная функция измерений;

$v(t)$ — δ-коррелированная нормально распределенная случайная векторная помеха с нулевым средним $E\{v(t)\} = 0$ и матрицей ковариаций $\mathrm{cov}\{v(t)\cdot v^T(t-\tau)\} = Q_v\cdot\delta(t-\tau)$.

Дальнейшие преобразования уравнения (7) связаны с представлением уравнения нелинейных измерений на уровне рассматриваемых конечномерных математических моделей состояний динамических систем, когда

$$y(t) = h[x_1(t), x_2(t), t] + v(t), \qquad (8)$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (5).

Разложение векторной функции $h[\cdot]$в ряд Маклорена относительно вектора $\{x_1(t), 0\}$ позволяет получить выражение

$$y(t) = h\left[x_1(t), 0, t\right] + \tfrac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\cdot x_2(t) + \\ +\tfrac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\tfrac{\partial}{\partial x_2}\left[\tfrac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\right]^T\cdot x_2(t) + \ldots + v(t). \qquad (9)$$

Для суммы членов разложения ряда Маклорена, начиная со второго, можно записать

$$\xi(t) = E\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\cdot x_2(t) + \frac{1}{2!}\times\right. \\ \left.\times x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\right]^T\cdot x_2(t) + \ldots\right\}, \qquad (10)$$

что позволяет выделить высокочастотную зашумляющую составляющую

$$v^*(t) = \frac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\cdot x_2(t) + \\ +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}h\left[x_1(t), 0, t\right]\right]^T\times \\ \times x_2(t) + \ldots + v(t) - \xi(t), \qquad (11)$$

для которой первый статистический момент $E\{v^*(t)\} = 0$, а векторная переменная $\xi(t)$ является медленно меняющейся марковской составляющей случайной помехи в измерениях с априорно неизвестными параметрами распределения.

С учетом соотношений (10) и (11) уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$y(t)=h\left[x_1(t),0,t\right]+\xi(t)+v^*(t)+v(t)= \\ =h\left[x_1(t),0,t\right]+\xi(t)+\tilde{v}(t). \qquad (12)$$

Поскольку функция $h[x_1(t), 0, t]$ не зависит от вектора $x_2(t)$, то справедливо следующее равенство

$$h[x_1(t), 0, t] = h[x_1(t), t].$$

Нелинейную модель измерений, адекватную реальному процессу измерений на векторе параметров и состояний конечной размерности $x_1(t)\subset x(t)$, можно записать в виде

$$y(t)=h\left[x_1(t),t\right]+\xi(t)+\tilde{v}(t), \qquad (13)$$

что доказывает справедливость утверждения для нелинейных моделей измерений выходных параметров бесконечномерных динамических систем.

Исследование свойств моделей состояний и измерений. Применимость гауссовской и марковской аппроксимации. Рассмотрим ситуацию, когда поведение динамических систем описывается с помощью переменных состояния (фазовых координат) дифференциальных уравнений первого порядка относительно этих переменных. Учитывая, что реальная динамическая система функционирует под воздействием случайных возмущений (и управляющих воздействий), помех и шумов, состояние системы в любой момент времени является случайным, т. е.

$$\dot{x}(t)=f\left[x(t),t\right]+g\left[x(t),t\right]\times \\ \times\omega(t),\ x(t_0)=x_0, \qquad (14)$$

где $f[\cdot]$, $g[\cdot]$ — детерминированные функции своих аргументов; $\omega(t)$ — входной центрированный случайный процесс с конечным временем корреляции.

Принятый в модели (14) динамической системы формирующий шум является, по своей сути, белым гауссовским случайным процессом, характерным для описания шумов электронных устройств, тепловых флуктуаций, космического излучения и т. п. [11]. Такие случайные процессы представляют собой суммарный эффект большого числа относительно малых импульсов, возникающих в случайные моменты времени. На основании центральной предельной теоремы [10, 12] плотность распределения вероятностей этой суммы неограниченно приближается к гаусосвской с увеличением числа слагаемых независимо от того, какие плотности вероятностей имеют отдельные слагаемые. Ссылка на то, что гауссовский шум является белым, относится к интервалу автокорреляции, который принимается намного меньшим всех характерных постоянных времени рассматриваемой динамической системы [43], т. е. для белого шума функция автокорреляции определяется следующей зависимостью

$$R(\tau)=\begin{cases}1, & \tau=0;\\ 0, & \tau\neq 0.\end{cases}$$

Важнейшим свойством гауссовских распределений является то, что они сохраняют неизменность вида распределения при линейных преобразованиях [14]. В связи с этим переход от бесконечномерных моделей состояния $x(t)\in\Omega_x^\infty$ реальных динамических стохастических систем (14) к их конечномерному представлению $x_1(t)\in\Omega_x^n$ согласно изложенному выше для линейных систем в виде

$$\dot{x}_1(t)=-\alpha_{11}(t)\cdot x_1(t)-\alpha_{12}(t)\cdot x_2(t)+ \\ +g\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t),$$

где

$$b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t)=M\left\{-\alpha_{12}(t)\cdot x_2(t)\right\}, \qquad (15)$$

$$g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t)= \\ =-\alpha_{12}(t)\cdot x_2(t)-b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t)= \\ =-\alpha_{12}(t)\cdot x_2(t)-M\left\{-\alpha_{12}(t)\cdot x_2(t)\right\}, \qquad (16)$$

или для модели состояний нелинейных систем в виде

$$\dot{x}_1(t)=f\left[x_1(t),0,t\right]+b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t)+ \\ +g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t),$$

где

$$b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t)=M\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t)+\right. \\ \left.+\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t)+\ldots\right\}; \qquad (17)$$

$$g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t)=\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t)+ \\ +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t)+ \\ +\ldots-b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t), \qquad (18)$$

не меняет вида закона распределения случайных процессов $\omega(t)$ и $u(t)$ в уравнениях состояний, поскольку в соотношениях (15)–(18) использованы операции линейных преобразований.

В уравнениях (15)–(18) принято: $x_1(t)$ — вектор параметров и состояний, подлежащих изучению, для которого справедливо $x_1(t)\subset x(t)$ и $Dim\{x_1(t)\}<Dim\{x(t)\}$, а также

$$x_2(t)=x(t)/x_1(t), x_2(t)\subset x(t).$$

Переход к дискретным последовательностям, определяемым разностным уравнением вида

$$x(k+1)=x(k)+f\left[x(k),\,w(k),\,k\right]\cdot\tau,$$

где $f[\cdot]$ — заданная непрерывная функция;

$w(k)$ — случайная (не белая) входная последовательность, позволяет отнести рассматриваемые модели и их отдельные составляющие сноса и диффузии [15, 16] к марковским, поскольку распределение вероятностей каждого члена такой последовательности зависит только от значения предыдущего члена, т. е.

$$\varphi\left[x(k+1)/x(k),x(k-1),\ldots,x(0)\right]=$$
$$=\varphi\left[x(k+1)/x(k)\right].$$

Марковские модели процессов нашли широкое применение при анализе и синтезе систем управления и связи, статистической обработке результатов измерений [1, 15–20], что обусловлено несомненным их достоинством — возможностью построения рекуррентных расчетных правил, существенно упрощающих алгоритмическую реализацию как математических моделей анализируемых систем, так и синтезируемых оптимальных фильтров.

С учетом марковости рассматриваемых моделей и последовательностей уравнение (1) можно представить в эквивалентной дискретной форме

$$x(k)=F(k/k-1)\cdot x(k-1)+$$
$$+G(k/k-1)\cdot w(k-1), \tag{19}$$

где $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ — переходные матрицы состояний и возмущений;

$w(\cdot)$ — входная винеровская последовательность.

Винеровский процесс по определению находится через белый шум $\omega(t)$ из стохастического дифференциального уравнения [21]

$$\frac{dw(t)}{dt}=\omega(k),\quad w(t_0)=w(0).$$

Поскольку белый шум $\omega(t)$ предполагается гауссовским процессом и при линейных преобразованиях свойство гауссовости сохраняется, то процесс $w(\cdot)$ также будет гауссовским с математическим ожиданием

$$\mu_w=M\left\{w(t)\right\}=\int_0^t w(t)dt=0$$

и дисперсией

$$D_w=\operatorname{cov}\left\{w(t),w(t)\right\}=$$
$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}M\left\{w(t),w(t)\right\}dt_1dt_2\cdot N_w(t)\cdot t,$$

где $N_w(\cdot)$ — матрица интенсивностей или матрица спектральных плотностей белого шума [11].

Кроме того, можно отметить, что винеровская последовательность также является марковской [22].

Таким образом, рассматриваемые конечные математические модели динамических стохастических систем в полной мере относятся к марковским (порождающим марковские последовательности), развитие которых происходит под воздействием гауссовских формирующих шумов [23–28].

Инвариантность моделей состояний и измерений к изменениям условий функционирования. Инвариантность математических моделей рассматривается с позиции неизменности их конечномерных формальных форм (систем дифференциальных уравнений), описание которых выполнено в соответствии с рассмотренными выше теоретическими положениями о достижимости адекватного описания в случаях, когда исследуется влияние комплекса факторов, определяющих условия функционирования изучаемых систем и процессов измерений их выходных параметров. Необходимость этого вызвана тем, что последующее использование получаемых оценок состояний параметров динамических систем на моделях, являющихся адекватными реальным системам и процессам измерений, предполагает приведение их к условиям статистической однородности. Это означает, что используемые оценки состояний и параметров должны быть получены на эквивалентных моделях, т. е. моделях, формы которых (состав и вид дифференциальных уравнений) инвариантны к реализовавшимся условиям функционирования (испытаний).

Изучение свойств инвариантности математических моделей следует рассматривать в отношении их форм, схожих с формами на основе уравнений диффузионного движения [1, 13, 15, 16, 28], содержащими уравнения сноса и диффузии. Рассматриваемые модели состояний, таким образом, имеют формы которые включают в себя:

– уравнения сноса (детерминированная составляющая);

– уравнения медленно меняющейся марковской составляющей изменения параметров динамической системы (не формализуемая стохастическая составляющая уравнений состояний, привлекаемая к описанию нестационарных координат детерминированной составляющей модели);

– уравнение формирующего шума (не формализуемая составляющая формирующего шума, лишенная медленно меняющейся марковской составляющей), т. е. моделей состояний, имеющих, по сути, двухкомпонентный формирующий входной шум.

В отношении рассматриваемых математических моделей состояний изучение свойств их инвариантности сводится, следовательно, к установлению неизменности их форм при воздействий различных комплексов возмущающих факторов.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему. Пусть реальная нелинейная динамическая система описывается с точностью до векторного формирующего шума $\omega(t)$, имеющего нулевое среднее $M\{\omega(t)\} = 0$ и δ — коррелированную матрицу интенсивностей

$$\mathrm{cov}\left\{\omega(t)\cdot\omega^T(t-\tau)\right\} = Q_\omega(t)\cdot\delta(t-\tau),$$

математической моделью вида

$$\dot{x}(t) = f\left[x(t),t\right] + g\left[x(t),t\right]\cdot\omega(t), \tag{20}$$

где $f[\cdot]$ — векторная функция;

$x(t)$ — вектор фазовых координат в фазовом пространстве Ω_x^∞ бесконечной размерности.

Пусть система подвергается воздействию возмущающих факторов, определяющих условия проведения эксперимента

$$\dot{\eta}(t) = b(t)\cdot\eta(t) + g_\eta\left[\eta(t),t\right]\cdot\eta_\omega(t) \tag{21}$$

где $\eta(\cdot)$ — векторный формирующий шум.

Тогда уравнение (20) можно записать в виде суммы (20) и (21), т. е.

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f\left[x(t),t\right] + b(t)\cdot\eta(t) + \\ +g_\eta\left[\eta(t),t\right]\cdot\eta_\omega(t) + g\left[x(t),t\right]\cdot\omega(t).\end{gathered} \tag{22}$$

Представим уравнение (22) в виде

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1\left[x(t),t\right]\\ f_2\left[x(t),t\right]\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1(t)\\ b_2(t)\end{bmatrix}\cdot\eta(t) + \\ +\begin{bmatrix}g_{1,\eta}[\eta,t]\\ g_{2,\eta}[\eta,t]\end{bmatrix}\cdot\eta_\omega(t) + \begin{bmatrix}g_1\left[x_1(t),t\right]\\ g_2\left[x_2(t),t\right]\end{bmatrix}\cdot\omega(t),\end{gathered}$$

причем можно выделить ту часть уравнений состояний, которая является моделью конечной размерности и адекватно описывает вектор параметров и состояний $x_1(t)\in\Omega_x^\infty$:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f_1\left[x(t),t\right] + b_1(t)\cdot\eta(t) + \\ +g_{1,\eta}\left[\eta(t),t\right]\cdot\eta_\omega(t) + g_1\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t).\end{gathered}$$

Поскольку векторная функция $f_1[x(t), t]$ включает в себя полный вектор состояний $x(t)$, то может быть преобразована к виду

$$f_1[x(t), t] = f_1[x_1(t), x_2(t), t] \tag{23}$$

Разложение этой функции в ряд Маклорена относительно вектора $\{x_1(t), 0\}$ имеет вид

$$\begin{gathered}f_1\left[x(t),t\right] = f_1\left[x_1(t),0,t\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) + \\ +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t) + \ldots\end{gathered}$$

С учетом суммы членов разложения ряда Маклорена начиная со второго можно записать

$$\begin{gathered}b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t) = \\ = M\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) + \right. \\ +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t) + \ldots \\ \left.\ldots + b_1(t)\cdot\eta(t) + g_{1,\eta}\left[\eta(t),t\right]\cdot\eta_\omega(t)\right\},\end{gathered} \tag{24}$$

что позволяет выделить высокочастотную составляющую формирующего шума

$$\begin{gathered}g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\cdot x_2(t) + \\ +\frac{1}{2!}\cdot x_2^T(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}f_1\left[x_1(t),0,t\right]\right]^T\cdot x_2(t) + \ldots \\ \ldots + b_1(t)\cdot\eta(t) + g_{1,\eta}\left[\eta(t),t\right]\cdot\eta_\omega(t) - \\ -b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t),\end{gathered} \tag{25}$$

для которого первый статистический момент $M\left\{g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t)\right\} = 0.$

С учетом соотношения (24) и выражения (25) модель (20) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = f_1\left[x_1(t),0,t\right] + b\left[x_1(t),t\right]\cdot u(t) + \\ +g^*\left[x_1(t),t\right]\cdot\omega(t),\end{gathered}$$

где $f_1[x_1(t), 0, t]$ не зависит от вектора параметров и состояний $x_2(t)$ и поэтому справедливо следующее равенство

$$f_1[x_1(t), 0, t] = f_1[x_1(t), t].$$

Тогда можно записать уравнение конечномерной модели состояний нелинейной динамической системы, адекватной реальной нелинейной динамической системе на векторе параметров и состояний конечной размерности $x_1(t)\subset x(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t),0,t]+b[x_1(t),t]\cdot u(t)+\\ &+g^*[x_1(t),t]\cdot \omega(t)+g_1[x_1(t),t]=\\ &= f_1[x_1(t),0,t]+b[x_1(t),t]\cdot u(t)+\\ &+\tilde{g}[x_1(t),t]\cdot \omega(t).\end{aligned} \quad (26)$$

Уравнение (26) для описания вектора $x_1(t)\in\Omega_x^n$ фазовых координат $x_1(t)\subset x(t)$ нелинейной динамической системы можно отождествить с динамической системой конечной размерности

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t),0,t]+b[x(t),t]\times\\ &\times u(t)+g[x(t),t]\cdot\omega(t),\end{aligned} \quad (27)$$

полагая, что вектор параметров и состояний $x(t)$ математической модели эквивалентен вектору $x_1(t)$ фазовых координат реальной динамической системы.

Полученное выражение (27) с точностью до обозначений совпадает с принятой ранее формой модели состояний для нелинейных бесконечномерных динамических систем, что свидетельствует об инвариантности рассматриваемой формы конечномерной математической модели к воздействию возмущающих факторов в уравнении (20), определяющих условия функционирования (проведения испытания).

Дуальность формального представления моделей состояний. Уравнения конечных моделей состояний можно рассматривать двояко:

– с позиции системы оптимального управления [28]

– с позиции задачи оптимальной фильтрации [15–17]

В первом случае медленно меняющаяся марковская составляющая $u(\cdot)$ в уравнениях состояний (1) может быть отождествлена с вектором оптимального управления, который на каждый временной момент поступления данных обеспечивает перевод динамической системы в такое состояние, которое наилучшим образом (в статистической постановке) согласуется с результатами измерений выходов такой системы в соответствии с выбранными критериями качества.

Во втором случае медленно меняющаяся марковская составляющая $u(\cdot)$ в уравнениях состояний (6) может быть включена в расширенный вектор состояний, что приводит к двухкомпонентной модели состояний —детерминированной и случайной составляющей.

Таким образом, уравнение для нелинейной конечномерной модели состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t),t]+b[x(t),t]\cdot u(t)+\\ &+g[x_1(t),t]\cdot\omega(t)\end{aligned} \quad (28)$$

с учетом квазистационарности марковской составляющей $u(\cdot)$ можно записать как

$$\dot{x}^*(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{u}(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases}f[x(t),t]+b[x(t),t]\cdot u(t)+g[x(t),t]\cdot\omega(t)\\ g_u[u(t),t]\cdot\omega(t)\end{cases}$$

или

$$\dot{x}^*(t)=f[x^*(t),t]+g[x^*(t),t]\cdot\omega(t),$$

где векторная функция $g[x^*(t), t]$ имеет вид

$$g[x^*(t),t]=\left(g^T[x(t),t],\, g_u^T[u(t),t]\right)^T.$$

Аналогичным образом уравнение для нелинейной конечномерной модели состояний (6) можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t),t]+b[x(t),t]\cdot u(t)+\\ &+g[x_1(t),t]\cdot\omega(t),\end{aligned}$$

с учетом квазистационарности марковской составляющей $u(\cdot)$ можно записать

$$\dot{x}^*(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{u}(t)\end{pmatrix}=\begin{cases}f[x(t),t]+b[x(t),t]\cdot u(t)+\\ +g[x(t),t]\cdot\omega(t)\\ g_u[u(t),t]\cdot\omega(t)\end{cases},$$

или

$$\dot{x}^*(t)=f[x^*(t),t]+g[x^*(t),t]\cdot\omega(t),$$

где векторная функция $g[x^*(t), t]$ имеет вид

$$g[x^*(t),t]=\left(g^T[x^*(t),t],\, g_u^T[u(t),t]\right)^T.$$

При переходе к дискретным расчетным схемам уравнения (28) конечномерных моделей состояний динамических стохастических систем, приведенных к дискретному времени, можно представить в виде разностного векторного уравнения

$$\begin{aligned}x(k) &= F[k/k-1]\cdot x(k-1)+\\ &+B[k/k-1]\cdot u(k-1)+G[k/k-1]\cdot w(k-1),\end{aligned} \quad (29)$$

где $F(\cdot)$, $B(\cdot)$, $G(\cdot)$ — переходные матрицы состояний $x(k)$ медленно и быстро меняющихся составляющих $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$ формирующего шума, воздействующего на динамическую систему;

k — характеризует номер временно́го отсчета.

Это представление будет соответствовать уравнению оптимального управления. Во втором случае, когда решаются задачи фильтрации эквивалентной формой представления модели (29) будет следующая

$$\begin{cases} x(k) = F[k/k-1] \cdot x(k-1) + \\ +B[k/k-1] \cdot u(k-1) + G[k/k-1] \cdot w(k-1) \\ u(k) = B_u[k/k-1] \cdot u(k-1) + \\ +G_u[k/k-1] \cdot w(k-1). \end{cases}$$

или

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F[k/k-1] & B[k/k-1] \\ 0 & B_u[k/k-1] \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x(k-1) \\ u(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G[k/k-1] \\ G_u[k/k-1] \end{pmatrix} \cdot w(k-1). \quad (30)$$

Полученную систему уравнений (30) дискретной модели состояний можно записать более компактно

$$\tilde{x}(k) = \tilde{F}[k/k-1] \cdot \tilde{x}(k-1) + \\ +\tilde{G}[k/k-1] \cdot \tilde{w}(k-1), \quad (31)$$

полагая, что

$$\tilde{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ u(k) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{F}[k/k-1] = \begin{pmatrix} F[k/k-1] & B[k/k-1] \\ 0 & B_u[k/k-1] \end{pmatrix};$$

$$\tilde{G}[k/k-1] = \begin{pmatrix} G[k/k-1] \\ G_u[k/k-1] \end{pmatrix}.$$

Различия между формальными представлениями моделей состояний для первого и второго случаев заключаются в том, что медленно меняющаяся марковская составляющая $u(\cdot)$ формирующего шума, которая отождествлялась с вектором оптимального управления в уравнениях (6)–(8) в первом случае, включена непосредственно в вектор состояний $\tilde{x}(\cdot)$ в уравнениях (31) для второго случая. Такой переход между формальными представлениями моделей состояний известен как принцип дуальности оптимального управления и оценивания состояний [29, 30].

Выводы

Математическое представление реальных систем на основе рассматриваемого материала в классе нелинейных нестационарных стохастических позволяет достигнуть адекватности моделей реальной системе по наблюдаемым параметрам, что обеспечит инвариантность математической модели к изменениям условий функционирования динамической системы. Для рассматриваемых математических моделей полный вектор состояния содержит, как это было отмечено выше, зависимые и независимые компоненты. По этой причине, проведено изучение совместной наблюдаемости и идентифицируемости нелинейных нестационарных моделей состояния, заданных в виде системы стохастических дифференциальных уравнений в форме Ланжевена.

Список литературы

[1] Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
[2] Кузнецов В.И. Применимость конечномерных моделей состояния и измерений в задачах параметрической идентификации динамических систем. М.: Двойные технологии, 2008. № 2. С. 38–41.
[3] Кузовков Н.Т., Салычев О.С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. М.: Машиностроение, 1982. 216 с.
[4] Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М.: Наука, 1966. 190 с.
[5] Мехра Р. Идентификация и адаптивная фильтрация Калмана // Механика, 1971. № 3. С. 34–51.
[6] Кузнецов В.И. Адаптивная фильтрация в задачах параметрической идентификации нестационарных динамических систем. М.: Двойные технологии, 2008. № 1. С. 29–34.
[7] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.
[8] Кукушкин С.С., Гладков И.А., Чаплинский В.С. Методы и информационные технологии контроля состояния динамических систем. М.: Хоружевский А.И., 2008. 328 с.
[9] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х., Кузнецов В.И. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.
[10] Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1982. 831 с.
[11] Городецкий А.Я. Информационные системы. Вероятностные модели и статистические решения. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 326 с.
[12] Венцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996. 400 с.
[13] Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 1. М.: Советское радио, 1974. 552 с.
[14] Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
[15] Тихонов В.И., Кульман А.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Советское радио, 1975. 704 с.
[16] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
[17] Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применения в связи и управлении. М.: Связь, 1976. 496 с.
[18] Острем К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1983. 322 с.
[19] Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Советское радио, 1978. 320 с.
[20] Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Советское радио, 1973. 232 с.
[21] Тарасюк А.Е., Мосин Е.Л. Методические указания. Методика расчета тропосферных погрешностей измерения текущих навигационных параметров летательных аппаратов. М.: Гос. комитет по стандартам, 1988. 24 с.

[22] Волков И.К., Зуев С.М. Цветкова Г.М. Случайные процессы / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крещенко. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 448 с.
[23] Инструменты и механизмы устойчивого инновационного развития. Вып. 67 / под ред. А.А. Сукиасяна. Уфа: Аэтерна, 2022. 352 с.
[24] Тесленко Е.А., Екимова М.Ю., Баранчук Н.А. Оценивание технических характеристик динамических систем в статистически неоднородных условиях испытаний // Нейрокомпьютеры и их применение. XIX Всерос. науч. конф.: тезисы докладов. Москва, 30 марта 2021 г. М.: Изд-во Московского государственного психолого-педагогического университета, 2021. С. 104–105.
[25] Тесленко Е.А., Баранчук Н.А., Екимова М.Ю., Бахурина И.А. Прогнозирование состояний динамических систем в математических экспериментах // Проблемы повышения эффективности научной работы в оборонно-промышленном комплексе России: Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф., Знаменск, 15–16 апреля 2021 г. Астрахань: Изд-во Астраханского государственного университета имени В.Н. Татищева, 2021. 433с.
[26] Тесленко Е.А., Екимова М.Ю., Баранчук Н.А. Задачи, возникающие при обработке и анализе в процессе проведения сложных экспериментов // Нейрокомпьютеры и их применение. XIX Всерос. науч. конф.: тезисы докладов. Москва, 30 марта 2021 г. М.: Изд-во Московского государственного психолого-педагогического университета, 2021. С. 96–97.
[27] Формирование и развитие новой парадигмы науки в условиях постиндустриального общества. Коллективная монография. Т. 43. / под редакцией А.А. Сукиасяна. Уфа: Аэтерна, 2021. 204 с.
[28] Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
[29] Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
[30] Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Наука, 1966. 190 с.

Сведения об авторах

Тесленко Евгений Алексеевич✉ — канд. техн. наук, начальник отдела науч.-испытательного центра 4-го Государственного центрального межвидового полигона Министерства обороны Российской Федерации (полигон Капустин Яр) (4 ГЦМП МО РФ), teslenko.zhenka@yandex.ru

Екимова Мария Юрьевна — канд. техн. наук, ст. науч. сотр. науч.-испытательного центра 4-го Государственного центрального межвидового полигона Министерства обороны Российской Федерации (полигон Капустин Яр) (4 ГЦМП МО РФ), mashula111@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.05.2023.
Одобрено после рецензирования 06.07.2023.
Принята к публикации 23.08.2023.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF STUDIED OBJECTS STATES AND MEASUREMENT PROCESSES OF ANALYZED PHYSICAL SYSTEMS

E.A. Teslenko✉, M.Yu. Ekimova

Scientific Testing Center 4 of the State Central Interspecific Landfill of the Ministry of Defense of the Russian Federation, 1, Koroleva st., 416550, Znamensk, Astrakhan reg., Russia

teslenko.zhenka@yandex.ru

The question arising in the process of analyzing physical systems is considered, as well as a mathematical description of the studied objects states and the processes of measuring their output parameters in the process of functioning, which consists in establishing appropriate mathematical models of states, evaluating states and parametric identification of dynamic systems on selected mathematical models based on the measurements results obtained during tests and experiments. Certain forms of mathematical models of states, mathematical models of measurement processes are assumed to identify parameters and evaluate the states of dynamic systems, and be reduced to determining the states and unknown parameters of given models. Estimates of unknown parameters are determined by determining the optimal correspondence of the chosen form of the mathematical model, which determines the depth of its formalization, and the parameters of this model to the available a priori data and measurement results. It is taken into account that optimal parameter estimates can be determined for the selected mathematical model, but this does not a guarantee their suitability in cases where the model is incorrect. The proof of the formulated statement for the case of nonlinear models of states is given. A mathematical model of the states of a dynamic system and a measurement model are developed, the relationship of the equations of states and measurements in the most general case is presented, given in the form of an additive mixture of a useful signal described by a nonlinear measurement equation and random interference. Studies of the properties of state models and measurements using Gaussian and Markov approximations are presented. The subsequent use of the obtained estimates of the states of parameters of dynamic systems on models that are adequate to real systems and measurement processes and their reduction to the conditions of statistical homogeneity is considered.

Keywords: identification, parameters, dynamic system, mathematical model

Suggested citation: Teslenko E.A., Ekimova M.Yu. *Matematicheskoe opisanie sostoyaniy izuchaemykh ob'ektov i protsessov izmereniy analiziruemykh fizicheskikh sistem* [Mathematical description of studied objects states and measurement processes of analyzed physical systems]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2023, vol. 27, no. 6, pp. 178–188. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-178-188

References

[1] Krasovskiy A.A. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Handbook on the theory of automatic control]. Moscow: Nauka, 1987, 712 p.
[2] Kuznetsov V.I. *Primenimost' konechnomernykh modeley sostoyaniya i izmereniy v zadachakh parametricheskoy identifikatsii dinamicheskikh sistem* [Applicability of finite-dimensional models of state and measurements in problems of parametric identification of dynamical systems]. Moscow: Dvoynye tekhnologii [Double technologies], 2008, no. 2, pp. 38–41.
[3] Kuzovkov N.T., Salychev O.S. *Inertsial'naya navigatsiya i optimal'naya fil'tratsiya* [Inertial navigation and optimal filtering]. Moscow: Mashinostroenie, 1982, 216 p.
[4] Li R. *Optimal'nye otsenki, opredelenie kharakteristik i upravlenie* [Optimal estimates, characterization and control]. Moscow: Nauka, 1966, 190 p.
[5] Mekhra R. *Identifikatsiya i adaptivnaya fil'tratsiya Kalmana* [Identification and adaptive Kalman filtering]. Mekhanika [Mechanics], 1971, no. 3, pp. 34–51.
[6] Kuznetsov V.I. *Adaptivnaya fil'tratsiya v zadachakh parametricheskoy identifikatsii nestatsionarnykh dinamicheskikh sistem* [Adaptive filtering in problems of parametric identification of non-stationary dynamical systems]. Moscow: Dvoynye tekhnologii [Double technologies], 2008, no. 1, pp. 29–34.
[7] Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. Moscow: Nauka, 1973, 448 p.
[8] Kukushkin S.S., Gladkov I.A., Chaplinskiy V.S. *Metody i informatsionnye tekhnologii kontrolya sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Methods and information technologies for monitoring the state of dynamic systems]. Moscow: Khoruzhevsky A.I., 2008, 328 p.
[9] Il'in V.A., Sadovnichiy V.A., Sendov Bl.Kh., Kuznetsov V.I. *Matematicheskiy analiz* [Mathematical analysis]. Moscow: Nauka, 1979, 720 p.
[10] Korn G., Korn M. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Mir, 1982, 831 p.
[11] Gorodetskiy A.Ya. *Informatsionnye sistemy. Veroyatnostnye modeli i statisticheskie resheniya* [Information Systems. Probabilistic models and statistical solutions]. St. Petersburg: Publishing house of SPbGPU, 2003, 326 p.
[12] Ventsel' A.D. *Kurs teorii sluchaynykh protsessov* [Course in the theory of random processes]. Moscow: Nauka, 1996, 400 p.
[13] Levin B.R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. In 3 books. Book. 1. Moscow: Soviet radio, 1974, 552 p.
[14] Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* [Tech. Handbook of Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow: Nauka, 1985, 640 p.
[15] Tikhonov V.I., Kul'man A.K. *Nelineynaya fil'tratsiya i kvazikogerentnyy priem signalov* [Nonlinear filtering and quasi-coherent signal reception]. Moscow: Soviet radio, 1975, 704 p.

[16] Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical radio engineering]. Moscow: Radio and communication, 1982, 624 p.
[17] Sage E., Mels J. *Teoriya otsenivaniya i ee primeneniya v svyazi i upravlenii* [Theory of evaluation and its applications in communication and management]. Moscow: Radio i svyaz' [Communication], 1976, 496 p.
[18] Ostrem K.Yu. *Vvedenie v stokhasticheskuyu teoriyu upravleniya* [Introduction to stochastic control theory]. Moscow: Mir, 1983, 322 p.
[19] Sosulin Yu.G. *Teoriya obnaruzheniya i otsenivaniya stokhasticheskikh signalov* [Theory of detection and estimation of stochastic signals]. Moscow: Soviet radio, 1978, 320 p.
[20] Kazakov V.A. *Vvedenie v teoriyu markovskikh protsessov i nekotorye radiotekhnicheskie zadachi* [Introduction to the theory of Markov processes and some radio engineering problems]. Moscow: Soviet radio, 1973, 232 p.
[21] Tarasyuk A.E., Mosin E.L. *Metodicheskie ukazaniya. Metodika rascheta troposfernykh pogreshnostey izmereniya tekushchikh navigatsionnykh parametrov letatel'nykh apparatov* [Methodical instructions. Method for calculating tropospheric errors in measuring the current navigation parameters of aircraft]. Moscow: State. standards committee, 1988, 24 p.
[22] Volkov I.K., Zuev S.M. Tsvetkova G.M. *Sluchaynye protsessy* [Random Processes]. Ed. V.S. Zarubin, A.P. Kreshchenko. Moscow: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2006, 448 p.
[23] *Instrumenty i mekhanizmy ustoychivogo innovatsionnogo razvitiya* [Tools and mechanisms for sustainable innovative development]. Iss. 67. Ed. A.A. Sukiasyan. Ufa: Aeterna, 2022, 352 p.
[24] Teslenko E.A., Ekimova M.Yu., Baranchuk N.A. *Otsenivanie tekhnicheskikh kharakteristik dinamicheskikh sistem v statisticheski neodnorodnykh usloviyakh ispytaniy* [Estimation of technical characteristics of dynamic systems in statistically inhomogeneous test conditions]. Neyrokomp'yutery i ikh primenenie. XIX Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya: tezisy dokladov [Neurocomputers and their application. XIX All-Russian scientific conference: abstracts of reports]. Moscow, March 30, 2021. Moscow: Moscow State University of Psychology and Education, 2021, pp. 104–105.
[25] Teslenko E.A., Baranchuk N.A., Ekimova M.Yu., Bakhurina I.A. *Prognozirovanie sostoyaniy dinamicheskikh sistem v matematicheskikh eksperimentakh* [Forecasting the states of dynamic systems in mathematical experiments]. Problemy povysheniya effektivnosti nauchnoy raboty v oboronno-promyshlennom komplekse Rossii: mater. IV Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii [Problems of increasing the efficiency of scientific work in the military-industrial complex of Russia: mater. IV All-Russian Scientific and Practical Conference], Znamensk, April 15–16, 2021. Astrakhan: Astrakhan Tatishchev State University, 2021. 433p.
[26] Teslenko E.A., Ekimova M.Yu., Baranchuk N.A. *Zadachi, voznikayushie pri obrabotke i analize v protsesse provedeniya slozhnykh eksperimentov* [Problems arising during processing and analysis, in the process of complex experiments]. Neyrokomp'yutery i ikh primenenie. XIX Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya: tezisy dokladov [Neurocomputers and their application. XIX All-Russian scientific conference: abstracts of reports]. Moscow, March 30, 2021. Moscow: Moscow State University of Psychology and Education, 2021. P. 96–97.
[27] *Formirovanie i razvitie novoy paradigmy nauki v usloviyakh postindustrial'nogo obshchestva. Kollektivnaya monografiya. T. 43* [Formation and development of a new paradigm of science in a post-industrial society. Collective monograph. T. 43]. Ed. by A.A. Sukiasyana. Ufa: Aeterna, 2021, 204 p.
[28] *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Handbook on the theory of automatic control]. Ed. A.A. Krasovsky. Moscow: Nauka, 1987, 712 p.
[29] Grop D. *Metody identifikatsii sistem* [Methods for identifying systems]. Moscow: Mir, 1979, 302 p.
[30] Eickhoff P. *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya* [Fundamentals of identification of control systems]. Moscow: Nauka, 1966, 190 p.

Authors' information

Teslenko Evgeny Alekseevich✉ — Cand. Sci. (Tech.), Head of the Department of the Scientific Testing Center of the 4th State Central Interspecific Polygon of the Ministry of Defense of the Russian Federation, teslenko.zhenka@yandex.ru

Ekimova Mariya Yur'evna — Cand. Sci. (Tech.), Senior researcher at the Research and Testing Center of the 4th State Central Interspecific Landfill of the Ministry of Defense of the Russian Federation, mashula111@yandex.ru

Received 26.05.2023.
Approved after review 06.07.2023.
Accepted for publication 23.08.2023.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article
The authors declare that there is no conflict of interest