*Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 6. С. 151–159. ISSN 2542-1468*
*Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2023, vol. 27, no. 6, pp. 151–159. ISSN 2542-1468*



УДК 512.643.8
DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-151-159
Шифр ВАК 1.2.2

# ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ДВУХ ПРОЕКТОРОВ

**А.М. Ветошкин[1]✉, А.А. Шум[2]**

[1]ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1
[2] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», Россия, 170026, г. Тверь, ул. Набережная Афанасия Никитина, д. 22

vetkin@mgul.ac.ru

Показано, что в канонической форме Жордана линейной комбинации проекторов $aP + bQ$ при $a^2 - b^2 \neq 0$ наблюдается следующая симметрия относительно значения $\beta = 0,5(a + b)$. Если есть несколько клеток $J_k(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_k(2\beta - \lambda)$. Для клеток с $\lambda = a, b, 0, a + b$ симметрия несколько нарушается: если есть клетка $J_k(\lambda)$, то обязательно есть парная клетка $J_l(2\beta - \lambda)$, где $|k - l| \leq 1$, причем или $k$, или $l$ больше единицы. Определено, что клетки $J_k(\beta)$ должны иметь четный порядок. Для получения этого результата была применена теорема Фландерса, в которой говорится о клетках в канонической форме Жордана матриц $AB$ и $BA$. Выявлено, что для случая $a = 1$ и $b = -1$, несмотря на то, что $a^2 - b^2 = 0$, результаты, сформулированные выше, частично остаются в силе. Оказалось, что в канонической форме Жордана разности $P - Q$ наблюдается следующая симметрия. Если есть несколько жордановых клеток $J_k(\lambda)$, $\lambda \neq 0, \pm 1$, то есть ровно столько же клеток $J_k(-\lambda)$. Для клеток с $\lambda = 1, -1$ симметрия несколько нарушена: если есть клетка $J_k(\pm 1)$, то обязательно есть парная клетка $J_l(\mp 1)$, где $|k - l| \leq 1$, причем или $k$, или $l$ больше единицы. Определено, что эти результаты очень напоминают теорему Фландерса. Оказалось, что это не случайно. Теорема Фландерса получена в данной работе, как применение приведенного выше результата о спектре разности проекторов
**Ключевые слова:** линейная комбинация проекторов, жорданова нормальная форма, жорданова клетка, подобие, теорема Фландерса

**Ссылка для цитирования:** Ветошкин А.М., Шум А.А. Особенности спектра линейной комбинации двух проекторов // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 6. С. 151–159. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-151-159

Проекторы являются матрицами с простейшим устройством спектра — всего два различных собственных значения, все жордановы клетки размера 1. Линейная комбинация проекторов $aP + bQ$ может быть гораздо богаче в своем спектральном устройстве.

## Цель работы

Цель работы — исследование свойств спектра линейной комбинации проекторов.

## Постановка задачи

Квадратная матрица $P$ называется проектором, если $P = P^2$. Нами получены результаты об устройстве спектра линейной комбинации двух проекторов.

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой исследуется жорданова форма разности двух проекторов $Q - P$.

## Материалы и методы

Обозначим $M_{m,n}$ — множество прямоугольных матриц размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. $M_n$ — множество квадратных матриц порядка $n$; $\lambda(A)$ — множество собственных значений квадратной матрицы $A$; $\lambda_i(A)$ — $i$-е собственное значение квадратной матрицы $A$; $I_n$ — единичная матрица порядка $n$ (или просто $I$);

$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ — след матрицы, сумма элементов на главной диагонали; $\det A$ — определитель матрицы $A$; $\mathrm{rk}(A)$ — ранг матрицы $A$.

Определим матрицу $T_k$ как квадратную матрицу порядка $k$, содержащую единицы в соседней с главной диагональю «наддиагонали» и нули во всех остальных позициях. Таким образом, $T_1 = 0$, $(T_k)^k = 0$. Жорданова клетка $J_k(\lambda)$ порядка $k$ задается как

$$J_k(\lambda) = \lambda I_k + T_k.$$

Определим квадратную матрицу порядка $k$ $S_k = \mathrm{diag}\,\{+1, -1, +1, -1, \ldots\}$, на диагонали которой чередуются 1 и –1. Выполняются следующие соотношения:

$$S_k^2 = I_k;\ S_k T_k S_k = -T_k;\ J_k(-\mu) = -S_k J_k(\mu) S_k.$$

## Результаты и обсуждение

Спектр разности проекторов изучался разными авторами: в работе [2] — применительно к проекторам в конечномерном пространстве, в работе [3] — для ортопроекторов в гильбертовом пространстве; в работе [4] — для произвольных проекторов в банаховой алгебре. В этих работах представлены главным образом материалы изучения связи спектра разности (или суммы) проекторов со спектром произведения рассматриваемых проекторов.

В отличие от работ [2–4], в работе [1] приведены результаты о симметрии в спектре разности проекторов. Основной результат заключается в следующем:

**Теорема 1.** *Для того чтобы матрица $F$ равнялась разности двух проекторов $F = Q - P$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

*а) жордановы клетки для собственных значений, отличных от $0$ и $\pm 1$ входят в жорданову нормальную форму матрицы $F$ строго парами — если есть несколько клеток $J_g(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_g(-\lambda)$;*

*б) жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы $F$ для собственных значений плюс-минус единица, можно разбить на пары $\{J_{g_i}(1),\ J_{h_j}(-1)\}$ так, что $|g_i - h_j| \le 1$, при этом в указанные пары должны входить все жордановы клетки порядка $>1$, клетки порядка $1$ — $J_1(1)$, $J_1(-1)$ необязательно входят в указанные пары.*

Отметим, что в жордановой нормальной форме матрицы $F$ количество клеток $J_1(1)$, $J_1(-1)$ и $J_k(0)$ может быть любым и для любого $k$.

Исследуем спектр линейной комбинации двух проекторов $P, Q \in M_n$:

$$F = aP + bQ.$$

Случай $a = 0$ или $b = 0$ с точки зрения устройства спектра матрицы $F$ не интересен, поэтому считаем, что $a, b \ne 0$.

Случай, когда $a + b = 0$, исследован в теореме 1.

Сумму двух проекторов можно представить в виде

$$P + Q = [P - (I - Q)] + I.$$

Здесь в квадратных скобках вычисляется разность двух проекторов. Поэтому случай $a = b$ сводится к случаю $a + b = 0$.

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $a^2 - b^2 \ne 0$.

Результаты об устройстве спектра линейной комбинации двух проекторов приведены в работе [5] без доказательств. Кроме того, в отличие от настоящей работы, в работе [5] нет полной формулировки необходимых условий.

Основным результатом проведенных нами исследований является теорема 2.

**Теорема 2.** *Для того чтобы матрица $F$ равнялась линейной комбинации двух проекторов*

$$F = aP + bQ; \quad a, b, a^2 - b^2 \ne 0,$$

*необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

*а) жордановы клетки для собственных значений $\lambda \notin \{0{,}5(a+b), a, b, 0, a+b\}$ входят в жорданову нормальную форму матрицы $F$ строго парами — если есть несколько клеток $J_g(\lambda)$, то есть ровно столько же клеток $J_g(a + b - \lambda)$;*

*б) жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы $F$ для собственных значений $a$ и $b$ можно разбить на пары клеток $\{J_{g_i}(a),\ J_{h_j}(b)\}$ так, что $|g_i - h_j| \le 1$, при этом в указанные пары клеток должны входить все жордановы клетки порядка $>1$, клетки порядка $1$ — $J_1(a)$, $J_1(b)$ необязательно входят в указанные пары клеток;*

*в) жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы $F$ для собственных значений $0$ и $a + b$, можно разбить на пары клеток, $\{J_{g_i}(0),\ J_{h_j}(a+b)\}$ так, что $|g_i - h_j| \le 1$, при этом в указанные пары клеток должны входить все жордановы клетки порядка $>1$, клетки порядка $1$ — $J_1(0)$, $J_1(a + b)$ необязательно входят в указанные пары клеток;*

*г) жордановы клетки, входящие в нормальную форму матрицы $F$ для собственного значения $\lambda = 0{,}5(a + b)$, должны иметь четный порядок.*

Отметим, что теорему 1 можно в некотором смысле считать частным случаем теоремы 2, получаемым при значениях $a = -1$, $b = 1$.

Если $a + b = 0$, утверждения а) теорем 1 и 2 совпадают. Утверждение б) теоремы 2 для пары $\{J_{g_i}(a),\ J_{h_j}(b)\}$ совпадает с утверждением б) теоремы 1 для пары $\{J_{g_i}(-1),\ J_{h_j}(1)\}$.

Однако утверждение в) теоремы 2 для пары $\{J_{g_i}(0),\ J_{h_j}(a+b)\}$ теряет смысл и, так сказать, дезавуирует утверждение г) теоремы 2 для этого случая.

Как оказалось, с теоремами 1 и 2 тесно связана теорема [6–8], которую иногда называют теоремой Фландерса.

В работе [9], а также в работах [10–14], эта теорема применяется как универсальное средство для определения жордановой структуры классов матриц, задаваемых как произведение двух кососимметричных, эрмитовых, инволютивных матриц или как произведение симметричной и кососимметричной матриц.

Теорему Фландерса можно сформулировать следующим образом:

**Теорема 3 (теорема Фландерса).** *Пусть $S \in M_m$, $R \in M_n$. Для того чтобы система уравнений относительно неизвестных матриц $A$ и $B$*

$$\begin{cases} AB = S \\ BA = R \end{cases}, \quad A \in M_{m,n},\ B \in M_{n,m},$$

*имела решение, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

*а) канонические формы Жордана матриц S и R имеют одинаковые наборы жордановых клеток для ненулевых собственных значений;*

*б) если* $g_1 \ge g_2 \ge \ldots \ge g_s$ *и* $h_1 \ge h_2 \ge \ldots \ge h_t$ *— это размеры вырожденных жордановых клеток в канонических формах Жордана соответственно матриц S и R, то обязательно* $|g_i - h_i| \le 1$, *при* $i \le \min(s, t)$*; при* $i > \min(s, t)$ *все числа* $g_i$ *или* $h_i$*, если таковые имеются, равны 1.*

При обосновании теоремы 1 в работе [1] самым сложным является доказательство необходимости условия б). Применение теоремы 3 могло бы значительно облегчить это доказательство. (К сожалению, во время написания работы [1] теорема 3 не была известна автору, и эта возможность была упущена). Факт необходимости условия б) в теореме 1 из работы [1] можно применить для обоснования необходимости условия б) теоремы 3 — самой сложной части в доказательстве теоремы Фландерса.

Достаточность в теореме 3 следует из наличия матриц $A$ и $B$, таких, что $AB$ и $BA$ удовлетворяют условиям а) и б) теоремы 3. Пример таких матриц можно найти в теореме 5 из работы [15]. В последнем разделе данной работы показано, как необходимость в теореме 3 может быть выведена из теоремы 1.

## Свойства линейной комбинации двух проекторов

Пусть матрица $F$ является линейной комбинацией двух проекторов $Q$ и $P$: $F = aP + bQ$, или $F - aP = bQ$. Возведем обе части последнего равенства в квадрат:

$$F^2 - a(FP + PF) + a^2P = b^2Q = b(F - aP).$$

Получаем:

**Утверждение 1.** *Матрица F равняется линейной комбинации проекторов Q и P*

$$F = aP + bQ$$

*тогда и только тогда, когда*

$$(F - \beta I)P + P(F - \beta I) = (F^2 - bF)a^{-1}, \quad \beta = 0{,}5(a + b). \tag{1}$$

Утверждение 1 в обратную сторону получается так. Из уравнения (1) следует, что

$$b(F - aP) = F^2 - a(FP + PF) + a^2P,$$

или

$$b(F - aP) = (F - aP)^2.$$

Утверждение 1 вытекает из того, что выражение $F - aP$ является кратным проектору.

В равенстве (1) сделаем замену

$$S = F - \beta I, \tag{2}$$

тогда

$$SP + PS = S + S^2 a^{-1} + \tau I a^{-1}, \tag{3}$$

где

$$\tau = 0{,}25(a^2 - b^2).$$

Если $\lambda$ является собственным значением $F$, то $\mu = \lambda - \beta$ — собственное значение $S$.

Необходимо выяснить, какими свойствами должна обладать матрица $S$, для того чтобы существовало решение-проектор $P$ уравнения (3).

Уравнение (3) для невырожденных матриц $S$ всегда имеет следующее решение, необязательно являющееся проектором

$$P = 0{,}5(I + Sa^{-1} + \tau a^{-1}S^{-1})/2. \tag{4}$$

Теорема 1 в работе [1] получена как результат исследования уравнения (3) для $\tau = 0$.

Далее обоснуем теорему 2 как результат изучения свойств матрицы $S$ из уравнения (3) при $\tau \ne 0$. Сначала производимые выкладки почти точно повторяют выкладки в работе [1], поэтому излагаются конспективно.

Применим к матрицам $S$, $P$, $Q$ подобие, приводящее матрицу $S$ к жордановой нормальной форме. Обозначим полученные подобные матрицы теми же символами. Таким образом, уравнения (3) и (4) не изменят своего вида.

Расположим жордановы клетки матрицы $S$ следующим образом

$$S = \mathrm{diag}\{\ldots, J_\mu, \ldots\}, \quad J_\mu = \mathrm{diag}\{\ldots, J_{k_i}(\mu), \ldots, J_{l_j}(-\mu), \ldots\}, \tag{5}$$

где матрица $J_\mu$ содержит все жордановы клетки матрицы $S$ с собственными значениями $\mu$ и $-\mu$.

Матрицы $P$, $Q$, как и в работе [1] имеют блочно-диагональный вид, который определяется размерами блоков $J_\mu$:

$$P = \mathrm{diag}\{\ldots, P_\mu, \ldots\}, \quad Q = \mathrm{diag}\{\ldots, Q_\mu, \ldots\}; \quad bQ_\mu = -aP_\mu + J_\mu + \beta I. \tag{6}$$

Для каждого блока $P_\mu$ выполняется уравнение (3):

$$J_\mu P_\mu + P_\mu = J_\mu + J_\mu^2 a^{-1} + \tau I a^{-1}. \tag{7}$$

Каждый блок $P_\mu$ является проектором.

**Случай $\mu = 0$ ($\lambda = 0{,}5(a + b)$).** Рассмотрим случай $\mu = 0$. Матрица $J_{\mu=0}$ имеет вид

$$J_{\mu=0} = \mathrm{diag}\{\ldots, T_{k_i}, \ldots\}.$$

Размеры блоков $T_{k_i}$ будут определять блочное разбиение матрицы $P_{\mu=0}$. Рассмотрим в полученной блочной матрице $P_{\mu=0}$ любой диагональный блок и обозначим его буквой $p$. Пусть порядок этого блока равен $k$. Из выражения (7) следует, что

$$T_k p + pT_k = T_k + T_k^2 a^{-1} + \tau I_k a^{-1}. \quad (8)$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ — это элементы «поддиагонали», соседней с главной диагональю в матрице $p$. Тогда главная диагональ матрицы $T_k p + pT_k$ принимает вид

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ \ldots,\ x_{k-2} + x_{k-1},\ x_{k-1}.$$

Из уравнения (8) следует, что все элементы последнего вектора должны быть равны $\tau a^{-1}$, что возможно только если $k$ четное. Учитывая подстановку (2), $\mu = 0$ у матрицы $S$, соответствует $\lambda = 0,5(a + b)$ у матрицы $F$, это обосновывает необходимость пункта в) теоремы 2.

Достаточность в этом пункте следует из наличия следующего решения уравнения (8):

$$p = I_{\frac{k}{2}} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau a^{-1} & 0 \end{pmatrix} + T_{\frac{k}{2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix};\ p^2 = p, \quad (9)$$

где $\otimes$ — кронекерово произведение [16, 17].

Матрицу $P_{\mu=0}$ можно взять блочно-диагональной с диагональными блоками вида (9).

**Случай $\mu \neq 0$ ($\lambda \neq 0,5(a + b)$).** Рассмотрим уравнение (7) для случая $\mu \neq 0$. Проведем следующее блочное разбиение $J_\mu$:

$$J_\mu = \mathrm{diag}\ \{G, H\}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{diag}\{J_{g_1}(\mu), J_{g_2}(\mu), \ldots, J_{g_s}(\mu)\}; \\ H &= \mathrm{diag}\{J_{h_1}(-\mu), J_{h_2}(-\mu), \ldots, J_{h_t}(-\mu)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Считаем, что порядки диагональных блоков матриц $G$ и $H$ упорядочены таким образом:

$$g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_s \text{ и } h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_t. \quad (12)$$

Пусть $G$ — квадратная матрица порядка $k$, $H$ — квадратная матрица порядка $l$. Соответствующее блочное разбиение проектора $P_\mu$ будет иметь вид

$$P_\mu = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $A \in M_k, D \in M_l, B \in M_{k,l}, C \in M_{l,k}$.

Подставив матрицы (10) и (13) в уравнение (7), получаем:

$$GA + AG = G + G^2 a^{-1} + \tau I a^{-1}, \quad (14а)$$

$$HD + DH = H + H^2 a^{-1} + \tau I a^{-1}, \quad (14б)$$

$$GB + BH = 0, \quad (14в)$$

$$HC + CG = 0. \quad (14г)$$

Учитывая, что матрица $P_\mu$ — проектор, получаем еще четыре условия:

$$BC = A - A^2, \quad (15а)$$

$$CB = D - D^2, \quad (15б)$$

$$AB + BD = B, \quad (15в)$$

$$CA + DC = C. \quad (15г)$$

Поскольку для матрицы $G$ выполняется условие, гарантирующее единственность решения уравнения (14а) [1, 18, 19]:

$$\forall i, j\ \lambda_i(G) + \lambda_j(G) \neq 0,$$

то из формулы (4) получаем:

$$A = 0,5(I_k + Ga^{-1} + \tau G^{-1} a^{-1}).$$

Аналогично для (14б):

$$D = 0,5(I_l + Ha^{-1} + \tau H^{-1} a^{-1}).$$

Подставив матрицы $A$ и $D$ в равенства (15в) и (15г), получаем следствия условий (14в) и (14г).

Подставив $A$ и $D$ в равенства (15а) и (15б), соответственно получаем:

$$BC = (0,5(a^2 + b^2)I - G^2 - \tau^2 G^{-2})(2a)^{-2}, \quad (16)$$

$$CB = (0,5(a^2 + b^2)I - H^2 - \tau^2 H^{-2})(2a)^{-2}. \quad (17)$$

Добавим к последним двум уравнениям уравнения (14в) и (14г), получим систему уравнений (14в), (14г), (16), (17), наличие решения которой будет необходимым и достаточным условием, наличия решения уравнения (7).

Определим функцию:

$$f(x) = (0,5(a^2 + b^2) - x^2 - \tau^2 x^{-2})(2a)^{-2}.$$

Правые части равенств (16) и (17) равны $f(G)$, $f(H)$.

Поскольку $G$ и $H$ — блочно-диагональные матрицы (11), то для того чтобы увидеть, какой вид будут иметь правые части уравнений (16) и (17), достаточно вычислить

$$\begin{aligned} f(J_k(\mu)) = (0,5(a^2 + b^2)I_k - (\mu I_k + T_k)^2 - \\ - \tau^2(\mu I_k + T_k)^{-2})(2a)^{-2}. \end{aligned} \quad (18)$$

(В формуле (18) для матрицы $H$ вместо $\mu$ нужно подставить $-\mu$).

Для обратной матрицы в формуле (18) выполняется равенство

$$(\mu I + T_k)^{-2} = \mu^{-2} \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) \left( -\frac{T_k}{\mu} \right)^i,\ T^0 = I. \quad (19)$$

Подставим равенство (19) в формулу (18)

$$\begin{aligned} f(J_k(\mu)) = f(\mu) I_k + [T_k(2\tau^2\mu^{-3} - 2\mu) - \\ - T_k^2(1 + 3\tau^2\mu^{-4}) - \tau^2\mu^{-2} \sum_{i=3}^{k-1} (i+1) \left( -\frac{T_k}{\mu} \right)^i ](2a)^{-2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Матрицы $BC$ и $CB$ в уравнениях (16), (17) будут вырожденными только тогда, когда $f(\mu) = 0$. Уравнение $f(\mu) = 0$ имеет четыре корня:

$$\mu_{1-4} = \frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{-a-b}{2}, \frac{a+b}{2}. \qquad (21)$$

Соответствующие собственные значения матрицы $F$ имеют вид

$$\lambda_{1-4} = a, b, 0, a+b.$$

Если $\mu \neq \mu_{1-4}$($\lambda_{1-4} \neq a, b, 0, a+b$), то матрицы $BC$ и $CB$ невырожденные, откуда следует, что матрицы $B$ и $C$ также невырожденные. Тогда из условия (14в) получаем:

$$G = -BHB^{-1}.$$

Матрицы $G$ и $-H$ подобны и поэтому имеют одинаковые жордановы клетки. Отсюда следует, что матрицы $G$ и $H$ имеют жордановы клетки одинаковых размеров. Таким образом обоснована необходимость условия а) в теореме 2.

Пусть теперь $\mu$ такое, что $f(\mu) = 0$. Матрица $f(J_k(\mu))$ является треугольно-теплицевой:

$$M = f(J_k(\mu)) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_k^{\,i}, \qquad (22)$$

причем при $\mu = \mu_{1-4}$, коэффициент $\alpha_1 = (2\tau^2\mu^{-3} - 2\mu)(2a)^{-2}$ не равен нулю.

Нильпотентная матрица $M$ в выражении (22) подобна $T_k$. Пусть $M$ подобна $\mathrm{diag}(..., T_{k_i}, ...)$, где $0 < k_i < k$; $\sum k_i = k$. Тогда, $M^{\max k_i} = 0$, это противоречит тому, что $M^{k-1} \neq 0$, поскольку $\max k_i \leq k-1$,

Таким образом, при $\mu$ из перечисления (21):

$$BC \sim \mathrm{diag}\{T_{g_1}, T_{g_2}, ..., T_{g_s}\},$$
$$CB \sim \mathrm{diag}\{T_{h_1}, T_{h_2}, ..., T_{h_t}\}.$$

Отсюда по теореме 3 пункту б) получаем, что размеры диагональных блоков в матрицах $G$ и $H$, перечисленных в выражении (12) удовлетворяют условиям

$$|g_i - h_i| \leq 1,\ i \leq \min(s, t);$$
$$g_i = 1 \text{ или } h_i = 1,\ i > \min(s, t).$$

Следовательно, обоснована необходимость условий б) и в) в теореме 2.

Отдельный случай необходимо рассмотреть, когда в матрице (10) $J_\mu$ нет одной из матриц — $G$ или $H$. Пусть, например, отсутствует матрица $H$. Аналогично решению уравнения (14а) получаем:

$$P_\mu = 0{,}5(I_k + Ga^{-1} + \tau G^{-1}a^{-1}).$$

Матрица $P_\mu$ — проектор, поэтому $P_\mu - P_\mu^2 = 0$. Матрица $P_\mu - P_\mu^2$ уже вычислялась ранее (см. правую часть формулы (16), т. е. в данном случае аналогично выражению (22) получаем:

$$0 = P_\mu - P_\mu^2 = f(G) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i T_k^{\,i}, \quad \alpha_0 = f(\mu),$$

$$\alpha_1 = (2\tau^2/\mu^3 - 2\mu)/(2a)^2.$$

Отсюда следует, что $f(\mu) = 0$. Таким образом, $\mu = \mu_{1-4}$ ($\lambda_{1-4} = a, b, 0, a+b$).

Выше установлено, что при таких значениях $\mu$ коэффициент $\alpha_1$ не равен нулю, поэтому на главной диагонали матрицы $G$ могут находиться жордановы блоки только размера 1. Матрица $G$ является скалярной.

**Достаточность условий а), б) и в) в теореме 2.** Достаточность условия а) теоремы 2 вытекает из следующего примера, приведенного для одной пары клеток $J_k(\mu)$ и $J_k(-\mu)$, (для краткости обозначим $Z = J_k(\mu)$):

$$aP + bQ = \begin{bmatrix} J_k(\mu) & 0 \\ 0 & J_k(-\mu) \end{bmatrix} + \beta I_{2k},$$

где

$$P = \frac{1}{2a}\begin{bmatrix} aI + Z + \tau Z^{-1} & Z^{-1}(Z^2 - \alpha^2 I)S \\ S(\beta^2 I - Z^2)Z^{-1} & S(aI - Z - \tau Z^{-1})S \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2a}\begin{bmatrix} Z + \alpha I \\ S(\beta I - Z) \end{bmatrix} Z^{-1}\begin{bmatrix} \beta I + Z & (Z - \alpha I)S \end{bmatrix}, P^2 = P; \qquad (23)$$

$$Q = \frac{1}{2b}\begin{bmatrix} bI + Z - \tau Z^{-1} & -Z^{-1}(Z^2 - \alpha^2 I)S \\ -S(\beta^2 I - Z^2)Z^{-1} & S(bI - Z + \tau Z^{-1})S \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2b}\begin{bmatrix} Z - \alpha I \\ -S(\beta I - Z) \end{bmatrix} Z^{-1}\begin{bmatrix} \beta I + Z & -(Z + \alpha I)S \end{bmatrix},\ Q^2 = Q; \qquad (24)$$

$$\alpha = 0{,}5(a-b);\quad \beta = 0{,}5(a-b);\quad \alpha\beta = \tau.$$

В этом примере не важно, является ли $\mu$ корнем уравнения $f(\mu) = 0$ или нет. Таким образом, данный пример обосновывает достаточность и для пунктов б) и в) теоремы 2 в случае равных размеров клеток $g_i = h_i$.

Рассмотрим случай, когда $g_i = h_i \pm 1$. Выбором одного из двух значений $\pm\mu$ можно обеспечить такое значение $\mu$, что $g_i = h_i - 1$. Обозначим $k = g_i$.

Приведем пример линейной комбинации проекторов для пары клеток $G = J_k(\mu)$ и $H = J_{k+1}(-\mu)$:

$$aP + bQ = \begin{bmatrix} J_k(\mu) & 0 \\ 0 & J_{k+1}(-\mu) \end{bmatrix} + \beta I_{2k+1}. \qquad (25)$$

Как отмечено выше, определим матрицу $P$ — решение-проектор уравнения (7) — если найдем матрицы $B$ и $C$, удовлетворяющие уравнениям (14в), (14г), (16), (17).

В работе [1] приведено общее решение уравнения типа (14в) или (14г) — $GX + XH = 0$, где коэффициенты $G$, $H$ определяются в выражении (11).

Матрица $X$ является блочной, размеры блоков в ней определяются размерами диагональных блоков матриц $G$, $H$. В матрице $X$ каждый квадратный блок $x$ является теплицевой верхнетреугольной матрицей, помноженной слева на матрицу $S_k$. Каждый прямоугольный блок матрицы $X$ имеет в своем составе такой квадратный блок $x$:

$$\text{или} \begin{bmatrix} 0 & x \end{bmatrix}, \text{или} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если число строк меньше числа столбцов, то прямоугольный блок имеет вид $[0 \ \ x]$; если число строк больше числа столбцов, то $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

Как видно примеры (23) и (24) имеют квадратные матрицы $B$ и $C$ — теплицевы верхнетреугольные с множителем $S_k$.

Выберем прямоугольные матрицы $B$ и $C$, для того чтобы выполнялись равенства (16) и (17). Учитывая, что $f(\mu) = 0$ и формулу (20), выпишем равенства (16) и (17) для случая (25):

$$BC = f(J_k(\mu)) = -[2T_k(\mu - \tau^2\mu^{-3}) +$$
$$+T_k^2(1+3\tau^2\mu^{-4}) + \tau^2\mu^{-2}\sum_{i=3}^{k-1}(i+1)\left(-\frac{T_k}{\mu}\right)^i](2a)^{-2};$$

$$CB = f(J_{k+1}(-\mu)) = -[-2T_{k+1}(\mu - \tau^2\mu^{-3}) +$$
$$+T_{k+1}^2(1+3\tau^2\mu^{-4}) + \tau^2\mu^{-2}\sum_{i=3}^{k-1}(i+1)\left(\frac{T_{k+1}}{\mu}\right)^i](2a)^{-2}.$$

Определим следующую функцию, которая уже встречалась в формуле (22)

$$r(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x^i;\ \alpha_1 = -2(\mu - \tau^2\mu^{-3})(2a)^{-2};$$
$$\alpha_2 = -(1+3\tau^2\mu^{-4})(2a)^{-2};\ i \geq 3;$$
$$\alpha_i = -\tau^2(i+1)(-\mu)^{-(i+2)}(2a)^{-2}.$$

Отметим, что $\alpha_i = \alpha_i(\mu)$ и $\alpha_i(-\mu) = (-1)^i\alpha_i(\mu)$, тогда

$$BC = r(T_k);\ CB = r(-T_{k+1}). \qquad (26)$$

Определим функцию $q(x)$ так

$$q(x) = \frac{r(x)}{x}. \qquad (27)$$

Выберем матрицы $B \in M_{k,k+1}$ и $C \in M_{k+1,k}$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix};$$
$$B_1 = q(T_k)S_k;\ C_1 = -S_k. \qquad (28)$$

Как видим, матрицы $B_1$ и $C_1$ теплицевы верхнетреугольные с множителем $S_k$, поэтому $B$ и $C$ удовлетворяют уравнениям (14в) и (14г).

Проверим, выполняются ли равенства (26) для матриц (28).

Получаем

$$BC = B_1T_kC_1;\ CB = \begin{bmatrix} 0 & C_1B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $S_kT_k = -T_kS_k$, для первой матрицы в равенстве (26) получаем

$$BC = q(T_k)S_kT_k(-S_k) = q(T_k)T_k = r(T_k).$$

Первое равенство в (26) обоснованно. Для матрицы $CB$ в равенстве (26), учитывая что $S_kT_k^mS_k = (-1)^mT_k^m = (-T_k)^m$, вычислим:

$$C_1B_1 = (-S_k)q(T_k)S_k = -q(-T_k). \qquad (29)$$

Рассмотрим выражение $r(-T_{k+1})$. Из равенства (27) следует, что

$$r(-T_{k+1}) = [-q(-T_{k+1})]T_{k+1}. \qquad (30)$$

Умножение теплицевой верхнетреугольной матрицы слева на $T_{k+1}$ приводит к сдвигу элементов этой матрицы на одну позицию вверх и вправо. Таким образом, в правом верхнем углу матрицы (30) находится матрица (29). Это доказывает, что выбор матриц (28) обеспечивает выполнение равенств (26).

Доказательство теоремы 2 завершено.

**Доказательство необходимости в теореме 3.** Определим величину $N(A, \lambda, k)$ как число жордановых клеток $J_k(\lambda)$ в канонической жордановой форме матрицы $A$.

Для любого ненулевого числа $\alpha$ следующие матрицы подобны $\alpha J_k(\lambda) \sim J_k(\alpha\lambda)$, [20, следствие 3.1.13], поэтому выполняются равенства

$$N(I + \alpha AB,\ 1 + \alpha\lambda, k) = N(AB, \lambda, k);$$
$$N(-I - \alpha BA, -1 - \alpha\lambda, k) = N(BA, \lambda, k). \qquad (31)$$

Доказательство необходимости условий а) и б) в теореме 3 получим из теоремы 1.

Построим проекторы $P$ и $Q$ на основе матриц $A$ и $B$ из теоремы 3:

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -AB & 2A + ABA \\ -B & 2I + BA \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -B & 2I + BA \end{bmatrix};$$
$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I + AB & 2A + ABA \\ -B & -BA \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2I + AB \\ -B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Тогда

$$F = Q - P = \begin{bmatrix} I + AB & 0 \\ 0 & -I - BA \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Пусть канонические формы Жордана матриц $AB$ и $BA$ соответственно имеют следующие размеры вырожденных жордановых блоков

$$g_1 \geq g_2 \geq \ldots \geq g_s \tag{34}$$

и

$$h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_t. \tag{35}$$

Тогда перечисления (34) и (35) являются и размерами жордановых блоков с собственными значениями 1 и –1 матриц $I + AB$ и $-I - BA$.

В силу части б) теоремы 1 для матрицы $F$ эти размеры удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} \left|g_i - h_i\right| \leq 1;\ i \leq \min(s, t); \\ g_i = 1 \quad \text{или} \quad h_i = 1,\ i > \min(s, t). \end{gathered} \tag{36}$$

Следовательно, обоснована необходимость условия б) в теореме 3.

Рассмотрим теперь ненулевые собственные значения матриц $AB$ и $BA$. Теорему 1 можно применить к матрице $F$, однако сложности создает возможное совпадение собственных значений матриц $I + AB$ и $-I - BA$. Кроме того, у каждой из этих матриц могут найтись пары противоположных собственных значений (т. е. два ненулевых собственных значения, дающие в сумме 0).

Пусть $\mu \in \lambda(AB) \setminus \{0\}$, $\nu \in \lambda(BA) \setminus \{0\}$, тогда собственные значения матриц $I + AB$ и $-I - BA$ могут быть равны, если

$$1 + \mu = -1 - \nu. \tag{37}$$

У матриц $I + AB$ и $-I - BA$ могут быть пары противоположных собственных значений, если существуют $\mu_1, \mu_2 \in \lambda(AB) \setminus \{0\}$ и $\nu_1, \nu_2 \in \lambda(BA) \setminus \{0\}$ такие, что соответственно

$$(1 + \mu_1) + (1 + \mu_2) = 0; \tag{38}$$

$$(-1 - \nu_1) + (-1 - \nu_2) = 0. \tag{39}$$

Как видно, условия (37)–(39) имеют одинаковый вид, и если выбрать ненулевое число α так, что выполняется

$$\begin{gathered} \alpha(\mu + \nu) \neq -2, \\ \forall \mu, \nu \in (\lambda(AB) \setminus \{0\}) \cup (\lambda(BA) \setminus \{0\}), \end{gathered} \tag{40}$$

то собственные значения матриц $I + \alpha AB$ и $-I - \alpha BA$ уже не могут совпадать, и каждая из этих матриц не имеет противоположных собственных значений.

Перейти к этим матрицам можно, например, подставив в формулы (32) и (33) вместо матрицы $A$ матрицу $\alpha A$:

$$F' = \begin{bmatrix} I + \alpha AB & 0 \\ 0 & -I - \alpha BA \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Отметим, что условие (40) при выборе значений $\mu = \nu$ гарантирует невырожденность матрицы $F'$.

Поскольку у матриц $I + \alpha AB$ и $-I - \alpha BA$ отличные от ±1 собственные значения не могут совпадать и каждая из этих матриц не имеет противоположных собственных значений, то из части а) теоремы 1, примененной к матрице $F'$, следует, что для любого $\mu \in \lambda(AB)$, $\mu \neq 0$ найдется $\nu \in \lambda(BA)$, такое, что

$$\begin{gathered} N(I + \alpha AB,\ 1 + \alpha\mu,\ k) = \\ = N(-I - \alpha AB,\ -1 - \alpha\nu,\ k). \end{gathered} \tag{42}$$

Поскольку $1 + \alpha\mu$ и $-1$ — $\alpha\nu$ противоположные собственные значения матрицы $F'$, то получаем

$$\mu = \nu.$$

Учитывая уравнение (31), из выражения (42) следует необходимость условия а) в теореме 3:

$$N(AB, \mu, k) = N(BA, \mu, k),\ \ \mu \neq 0.$$

Следовательно, необходимость в теореме 3 доказана.

## Выводы

Теорема 2, доказанная в настоящей работе, описывает специальные свойства симметрии канонической формы Жордана линейной комбинации проекторов. Эти свойства, связанные с теоремой Фландерса, найдут применение в разных разделах линейной алгебры.

## Список литературы


[1] Ветошкин А.М. Жорданова форма разности проекторов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 201. Т. 54. № 3. С. 375–390.

[2] Anderson W.N., Harner E., Trapp G.E. Eigenvalues of the difference and product of projections // Linear Multilinear Algebra, 1985, v. 17, pp. 295–299.

[3] Omladic M. Spectra of the difference and product of projections // Proc. Amer. Math. Soc., 1987, v. 99, pp. 317–318.

[4] Baraa M., Boumazgour M. Spectra of the difference, sum, and product of idempotents // Studia Math., 2001, v. 148, no. 1, pp. 1–3.

[5] Ветошкин А.М. Жорданова форма линейной комбинации двух проекторов // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2022. Т. 29. Вып. 3. С. 284–285.

[6] Flanders H. Elementary divisors of AB and BA // Proc. Amer. Math. Soc., 1951, no. 2, pp. 871–874.

[7] Parker W.V., Mitchell B.E. Elementary divisors of certain matrices // Duke Math. J., 1952, v. 19, pp. 483–485.

[8] Thompson R.C. On the matrices AB and BA // Linear Algbra Appl., 1968, no. 1, pp. 43–58.

[9] Икрамов Х.Д. О произведениях симметричных, кососимметричных, эрмитовых и инволютивных матриц // Вестник Московского университета. Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, 1998. № 1. С. 8–11.

[10] Drazin M.P. A note on skew-symmetric matrices // Math. Gazette, 1952, v. 36, pp. 253–255.

[11] Anderson B.D.O. Orthogonal decompositions defined by a pair of skew-symmetric forms // Linear Algebra Appl., 1974, no. 8, pp. 91–93.

[12] Gow R., Laffey T.J. Paire of alternating forms and products of two skew-symmetric matrices // Linear Algebra Appl., 1984, v. 63, pp. 119–132.
[13] Dokovic D.Z. On the product of two alternating matrices // Amer. Math. Monthly, 1991, v. 98, no. 10, pp. 935–936.
[14] Ballantine C.S. Some involutory similarities // Linear and Multilinear Algebra, 1975, no. 3, pp. 19–23.
[15] Horn R.A., Merino D.I. Contragredient equivalence: A canonical form and some applications // Linear Algebra Appl., 1995, v. 214, pp. 43–92.
[16] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY: Wiley, 1996, 304 p.
[17] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, 2009, 1101 p.
[18] Икрамов Х.Д. Спектральные особенности специальных классов матриц // Вычислительные процессы и системы, 1991. Вып. 8. С. 168–203.
[19] Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
[20] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

## Сведения об авторах

**Ветошкин Александр Михайлович**✉ — канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (Мытищинский филиал), vetkin@mgul.ac.ru

**Шум Александр Анатольевич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 21.08.2023.
Одобрено после рецензирования 04.09.2023.
Принята к публикации 11.10.2023.

# LINEAR COMBINATION OF TWO PROJECTORS SPECTRUM FEATURES

**A.M. Vetoshkin[1]✉, A.A. Shum[2]**

[1]BMSTU (Mytishchi branch), 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg. Russia
[2]Tver' State Technical University, 22, Afanasy Nikitin embankment st., Tver, 170026, Russia

vetkin@mgul.ac.ru

It is shown that in the canonical Jordan form of the linear combination of projectors $aP + bQ$ for $a^2 - b^2 \neq 0$ the following symmetry is observed with respect to the value $\beta = 0,5(a + b)$. If there are several cells $J_k(\lambda)$, then there are exactly the same number of cells $J_k(2\beta - \lambda)$. For cells with $\lambda = a, b, 0, a + b$, the symmetry is somewhat broken: if there is a cell $J_k(\lambda)$, then there is necessarily a paired cell $J_l(2\beta - \lambda)$, where $|k - l| \leq 1$, and either $k$ or $l$ is greater than one. It is determined that the cells $J_k(\beta)$ must have an even order. To obtain this result, Flanders' theorem was applied, which talks about cells in the canonical Jordan form of the matrices $AB$ and $BA$. It is revealed that for the case of $a = 1$ and $b = -1$, despite the fact that $a^2 - b^2 = 0$, the results formulated above partially remain in force. It turned out that the following symmetry is observed in the canonical Jordan form of the difference $P - Q$. If there are several Jordan cells $J_k(\lambda)$, $\lambda \neq 0, \pm 1$, then there are exactly the same number of cells $J_k(-\lambda)$. For cells with $\lambda = 1, -1$, the symmetry is somewhat broken: if there is a cell $J_k(\pm 1)$, then there is necessarily a pair cell $J_l(\mp 1)$, where $|k - l| \leq 1$, and either $k$ or $l$ is greater than one. It is determined that these results are very similar to Flanders' theorem. It turned out that this was no coincidence. Flanders' theorem is obtained in this work as an application of the above result on the spectrum difference of projectors.
**Keywords:** linear combination of projectors, Jordan normal form, Jordan cell, similarity, Flanders' theorem

**Suggested citation:** Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Osobennosti spektra lineynoy kombinatsii dvukh proektorov* [Linear combination of two projectors spectrum features]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2023, vol. 27, no. 6, pp. 151–159. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-6-151-159

## References

[1] Vetoshkin A.M. *Zhordanova forma raznosti proektorov* [Zhordanov form of difference of projectors]. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2014, v. 54, no. 3, pp. 375–390.
[2] Anderson W.N., Harner E., Trapp G.E. Eigenvalues of the difference and product of projections. Linear Multilinear Algebra, 1985, v. 17, pp. 295–299.
[3] Omladic M. Spectra of the difference and product of projections. Proc. Amer. Math. Soc., 1987, v. 99, pp. 317–318.
[4] Baraa M., Boumazgour M. Spectra of the difference, sum, and product of idempotents // Studia Math., 2001, v. 148, no. 1, pp. 1–3.
[5] Vetoshkin A.M. *Zhordanova forma lineynoy kombinatsii dvukh proektorov* [Jordan form of a linear combination of two projectors]. Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki [Survey of applied and industrial mathematics], 2022, v. 29, no. 3, pp. 284–285.

[6] Flanders H. Elementary divisors of AB and BA. Proc. Amer. Math. Soc., 1951, no. 2, pp. 871–874.
[7] Parker W.V., Mitchell B.E. Elementary divisors of certain matrices.Duke Math. J., 1952, v. 19, pp. 483–485.
[8] Thompson R.C. On the matrices AB and BA. Linear Algrbra Appl., 1968, no. 1, pp. 43–58.
[9] Ikramov Kh.D. *O proizvedeniyakh simmetrichnykh, kososimmetrichnykh, ermitovykh i involyutivnykh matrits* [On products of symmetric, skew-symmetric, Hermitian and involutive matrices]. Vestn. Mosk. Un-ta. Ser. 15, Vychis. Matem. i Kibern. [Vestn. Moscow University. Ser. 15, Comput. Mat. and Cybern.], 1998, no. 1, pp. 8–11.
[10] Drazin M.P. A note on skew-symmetric matrices. Math. Gazette, 1952, v. 36, pp. 253–255.
[11] Anderson B.D.O. Orthogonal decompositions defined by a pair of skew-symmetric forms. Linear Algebra Appl., 1974, no. 8, pp. 91–93.
[12] Gow R., Laffey T.J. Paire of alternating forms and products of two skew-symmetric matrices. Linear Algebra Appl., 1984, v. 63, pp. 119–132.
[13] Dokovic D.Z. On the product of two alternating matrices. Amer. Math. Monthly, 1991, v. 98, no. 10, pp. 935–936.
[14] Ballantine C.S. Some involutory similarities. Linear and Multilinear Algebra, 1975, no. 3, pp. 19–23.
[15] Horn R.A., Merino D.I. Contragredient equivalence: A canonical form and some applications. Linear Algebra Appl., 1995, v. 214, pp. 43–92.
[16] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY: Wiley, 1996, 304 p.
[17] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, 2009, 1101 p.
[18] Ikramov Kh.D. *Spektral'nyye osobennosti spetsial'nykh klassov matrits* / [Spectral singularities of special classes of matrices]. Vychislitel'nyye protsessy i sistemy [Computing processes and systems]. Iss. 8. [Science. Ch. ed. Phys.-Math. lit.], 1991, pp. 168–203.
[19] Ikramov Kh.D. *Chislennoe reshenie matrichnykh uravneniy* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow: Nauka, 1984, 192 p.
[20] Horn R., Johnson C. *Matrichnyy analiz* [Matrix analysis]. Moscow: Mir, 1989, 655 c.

## Authors' information

**Vetoshkin Aleksandr Mikhaylovich**✉ — Cand. Sci. (Tech), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), vetkin@mgul.ac.ru
**Shum Aleksandr Anatol'evich** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 21.08.2023.
Approved after review 04.09.2023.
Accepted for publication 11.10.2023.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article
The authors declare that there is no conflict of interest