

СИГМОИДНЫЕ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ХОДА РОСТА ПО ВЫСОТЕ КУЛЬТУР СОСНЫ ОБЫКНОВЕННОЙ

Е.Е. Иванова✉, Н.А. Бабич

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (САФУ), Россия, 163002, г. Архангельск, ул. Набережная Северной Двины, д. 17

e.e.ivanova@narfu.ru

Приведены результаты анализа и применимости сигмоидных функций для изучения хода роста культур сосны обыкновенной на территории северотаежного района европейской части Российской Федерации в черничном типе условий местопроизрастания. Предложена вычислительная процедура поиска моделей хода роста лесных культур. Модель хода роста отображает связь возраста и высоты дерева и в своем описании содержит сигмоидные функции хода роста. Сигмоидные функции отобраны для каждой из пяти фаз роста и развития древостоя в результате регрессионного анализа. В общем виде модель хода роста культур сосны обыкновенной в черничниках северотаежного района европейской части Российской Федерации представляет систему уравнений, созданную на основе уравнений Вейбулла, Дракина — Вуевского и Ричардса.

Ключевые слова: ход роста дерева, моделирование, сигмоидная функция хода роста, культуры сосны обыкновенной, математическая модель

Ссылка для цитирования: Иванова Е.Е., Бабич Н.А. Сигмоидные функции в моделировании хода роста по высоте культур сосны обыкновенной // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2023. Т. 27. № 5. С. 109–116. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-5-109-116

Географическая обширность проведения искусственного лесовосстановления не позволяет создать общероссийскую конкретную модель роста культивируемых пород. Исследования в этом направлении ведутся постоянно и обусловлены запросами практики и развитием компьютерных технологий, позволяющих в самое короткое время обработать многочисленные исходные данные. В современном исследовании древостоев ключевой задачей стал поиск закономерностей хода роста культивируемого растения через математическое описание. Данные исследования имеют большое прикладное и теоретическое значение, поскольку позволяют применять методы математического моделирования в прогнозировании развития насаждения. Методы математического моделирования широко применяются в различных областях. С их помощью можно делать долгосрочные прогнозы и осуществлять корректировку текущих мероприятий. Отсюда и развитие лесоводственной науки также имеет направление изучения закономерностей хода роста с помощью математического моделирования. Фундаментальные разработки в этой области были сделаны еще в середине XX в. В настоящее время во многих экспериментальных исследованиях получены результаты применения найденных математических закономерностей [1, 2], основанных на биологическом росте организмов.

Биологический ход роста культивируемого растения описывается *s*-образной кривой или, иначе говоря, сигмоидной кривой. Графическое представление кривой хода роста имеет три фазы. В первой фазе кривая хода роста графически может быть описана уравнением экспоненциальной функции, это фаза интенсивного роста. Во второй фазе наблюдается снижение роста в высоту, однако идет интенсивный рост дерева по диаметру ствола, вторая фаза может быть описана логарифмической функцией. Изначально *s*-образная кривая применялась для составления прогнозов изменения скорости роста населения [3]. Позднее с помощью *s*-образной кривой описывались законы развития различных систем в широком смысле и изучались экономические процессы [4].

Математический анализ сигмоидных функций хода роста, выполненный нами ранее, показал, что в качестве модельных функций для изучения хода роста древостоя в высоту могут быть применены модели, основанные на следующих уравнениях [5]:

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}} \text{ (логистическое уравнение) [3];}$$

$$y = ae^{\frac{b}{x^c}} \text{ (уравнение Шумахера) [6];}$$

$$y = ae^{\frac{b}{x}} \text{ (уравнение Теразаки) [7];}$$

$$y = ax^b e^{-cx} \text{ (уравнение Коллера) [8].}$$

Кроме четырех указанных выше модельных функций для исследования хода роста нами были включены модели, которые ранее использовались для исследования хода роста древостоя в высоту относительно времени [9–12]:

$$y = \frac{a}{(1 + e^{-bx})^d} \text{ (уравнение Ричардса) [13];}$$

$$y = ae^{-be^{-cx}} \text{ (уравнение Гомперца) [14];}$$

$$y = a(1 - e^{-bx})^c \text{ (уравнение Дракина —}$$

Вуевского) [15];

$$y = a - be^{-cx^d} \text{ (уравнение Вейбулла) [16].}$$

В исследовании хода роста необходимо учитывать жизненный цикл лесных культур, который разбивается на последовательные фазы роста и развития. Основателями теории по дифференциации культур по фазам роста и развития являются Н.П. Кобранов [17] и В.В. Огиевский [18]. Существуют различные подходы к дифференциации древостоев, созданных искусственным образом [19].

Наше исследование проводилось с учетом пяти фаз роста и развития культур сосны обыкновенной:

- 1) фазы приживания (1–3 года);
- 2) индивидуального роста или фазы, предшествующей смыканию (4–10);
- 3) смыкания (11–15 лет);
- 4) чащи (16 лет и до 20 лет);
- 5) жердняка (примерно к 25 годам; окончание фазы соответствует периоду, когда объем ствола превышает 2,0 см).

Цель работы

Цель работы — поиск моделей хода роста лесных культур на примере искусственных древостоев сосняка черничного северотаежного района европейской части Российской Федерации с учетом фаз роста и развития.

Объекты и методы исследования

Объектом исследования служили посадки сосны обыкновенной, произрастающие на территории бывших Онежского и Холмогорского лесхозов, в черничном типе условий местопроизрастания. Сосняк черничный распространен в северотаежном районе европейской части РФ.

Для получения достоверных результатов использовали данные, собранные на 33 пробных площадях. Камеральная обработка, полученных данных проводилась на основании методических указаний [20, 21], а также с учетом ГОСТов и полевого справочника таксатора [22, 23]. На каждой пробной площади фиксировались таксационные показатели, возраст и средняя высота деревьев.

Для обоснования модели хода роста использовали 103 исходные точки, полученные в результате проведения авторских натурных исследований и обобщения архивных данных, имеющихся на кафедре ландшафтной архитектуры и искусственных лесов Высшей школы естественных наук и технологий, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (САФУ), а также литературные данные [24–26].

Подбор моделей хода роста по высоте осуществлялся в два этапа.

На первом этапе проводили анализ отобранных сигмоидных моделей хода роста. С помощью программы «CurveExpert Professional 2.4.0» выполнили расчет параметров моделей хода роста. Точность аппроксимирующих моделей хода роста установили на основе стандартной ошибки и коэффициента детерминации. Успешной считалась модель, которая соответствовала следующим требованиям:

- модель объясняла не менее 90 % вариаций зависимости переменной, т. е. $R^2 > 0,9$;
- стандартная ошибка оценки модели должна иметь минимальное отклонение от линии регрессии, т. е. $S < 1$.

Далее на основе полученных параметров аппроксимирующих моделей были сделаны прогнозные модели хода роста культур до 25 лет.

На втором этапе выполняли сравнительный анализ прогнозных моделей с экспериментальными данными по фазам роста и развития культур, что позволило отобрать прогнозные модели, оценки надежности которых удовлетворяют успешности модели.

Результаты и обсуждение

Для анализа хода роста культур использовались сигмоидные функции хода роста, используемые при моделировании роста деревьев, где в описании в качестве переменной x используется возраст древостоя или отдельного дерева, a, b, c, d — параметры уравнения, y — таксационный показатель древостоя.

На математическом языке связь, представленная в описании сигмоидной функции, означает функциональную зависимость, в которой каждому значению аргумента x (возрасту) соответствует определенное значение величины y (таксационного показателя древостоя, к которому могут относиться высота дерева, диаметр ствола, запас дерева и т. п.). Зависимость величины x (возраста) описывается определенным законом. Другим способом представления функции является графическое описание зависимости, т. е. ход роста может быть описан графиком функции, представляющей собой s -образную кривую. В общем случае график функции описывает семейство кривых,

Т а б л и ц а 1

Параметры сигмоидных функций хода роста

Sigmoidal functions parameters of growth progress

Название функции	Математическое выражение	Параметр			
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Уравнение Гомперца	$y = ae^{-be^{-cx}}$	5,22	1,64	0,13	–
Уравнение Вейбулла	$y = a - be^{-cx^d}$	3,87	3,69	0,0005	2,87
Уравнение Ричардса	$y = \frac{a}{(1 + e^{-bx})^{\frac{1}{d}}}$	3,81	5,18	0,38	1,47
Уравнение Шумахера	$y = ae^{-\frac{b}{x^c}}$	95,7	10,35	0,38	–
Уравнение Теразаки	$y = ae^{-\frac{b}{x}}$	9,21	18,99	–	–
Уравнение Коллера	$y = ax^b e^{-cx}$	0,007	2,66	0,08	–
Уравнение Дракина — Вуевского	$y = a(1 - e^{-bx})^c$	6,58	0,08	2,69	–
Логистическое уравнение	$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$	3,98	41,72	0,3	–

содержащих многообразную информацию исходя из характера параметров *a*, *b*, *c* и т. п., входящих в состав функциональной зависимости.

Для представленных выше функциональных зависимостей хода роста параметры *a*, *b*, *c*, *d* свидетельствуют о характере кривой хода роста:

– параметр *a* — о растяжении графика функции вдоль оси *Oy* на коэффициент *a*;

– параметр *b* — о смещении графика функции вдоль оси *Ox* на коэффициент *b*;

– параметр *c* — о сжатии или смещении графика функции вдоль оси *Ox* и приближении к оси *Oy* при увеличении *|c|*;

– параметр *d* для уравнений, в которые данный параметр включен, имеет разное описание. Так, в уравнении Вейбулла параметр *d* характеризует сжатие графика функции относительно точки перегиба, что означает резкий биологический рост древостоя или отдельного дерева с его увеличением. При $d \rightarrow -\infty$ наблюдается медленный рост древостоя или отдельного дерева. В уравнении Ричардса параметр *d* указывает на характер скорости возрастания хода роста до фазы спелости или затухание в росте в высоту.

По исходным данным проведен регрессионный анализ в соответствии с предлагаемыми сигмоидными функциями (табл. 1, рис. 1).

Моделирование хода роста культур и использование полученных сигмоидных функций с параметрами (см. табл. 1), позволили прийти к выводу, что не все модели хода роста можно применять на практике. Модели на основе уравнений Шумахера, Коллера и Теразаки показали неудовлетворительный результат. Модель на основе уравнения Шумахера продемонстрировала резкий рост культур начиная с возраста 2 года.

Т а б л и ц а 2

Статистика ошибок моделирования хода роста культур сосны обыкновенной по высоте

Statistics of errors in modelling the height progress of the pine crop growth rate

Модель хода роста, созданная на основе уравнение	Стандартная ошибка <i>S</i>	Коэффициент детерминации R^2
Уравнение Гомперца	0,449	0,901
Уравнение Вейбулла	0,447	0,903
Уравнение Ричардса	0,446	0,904
Уравнение Дракина—Вуевского	0,455	0,898
Логистическое уравнение	0,444	0,903

Модель на основе уравнения Теразаки отразила отсутствие динамики на всем возрастном периоде. Модель на основе уравнения Коллера начиная с возраста 42 лет показала отрицательную динамику — уменьшение высоты с увеличением возраста. В связи с этим модели, созданные на основе уравнения Шумахера, Коллера и Теразаки, были исключены из дальнейшего рассмотрения.

Впоследствии модели хода роста культур изучались на основе уравнений Гомперца, Вейбулла, Ричардса, Дракина — Вуевского и логистического уравнения. Данные уравнения определяются высоким коэффициентом детерминации R^2 и минимальной стандартной ошибкой *S*. Стандартная ошибка *S* для указанных моделей варьирует от 0,444 до 0,449, а коэффициент детерминации R^2 — от 0,898 до 0,904, что свидетельствует об успешности модели и удовлетворяет требованиям, предъявляемым к ее оценке (табл. 2).

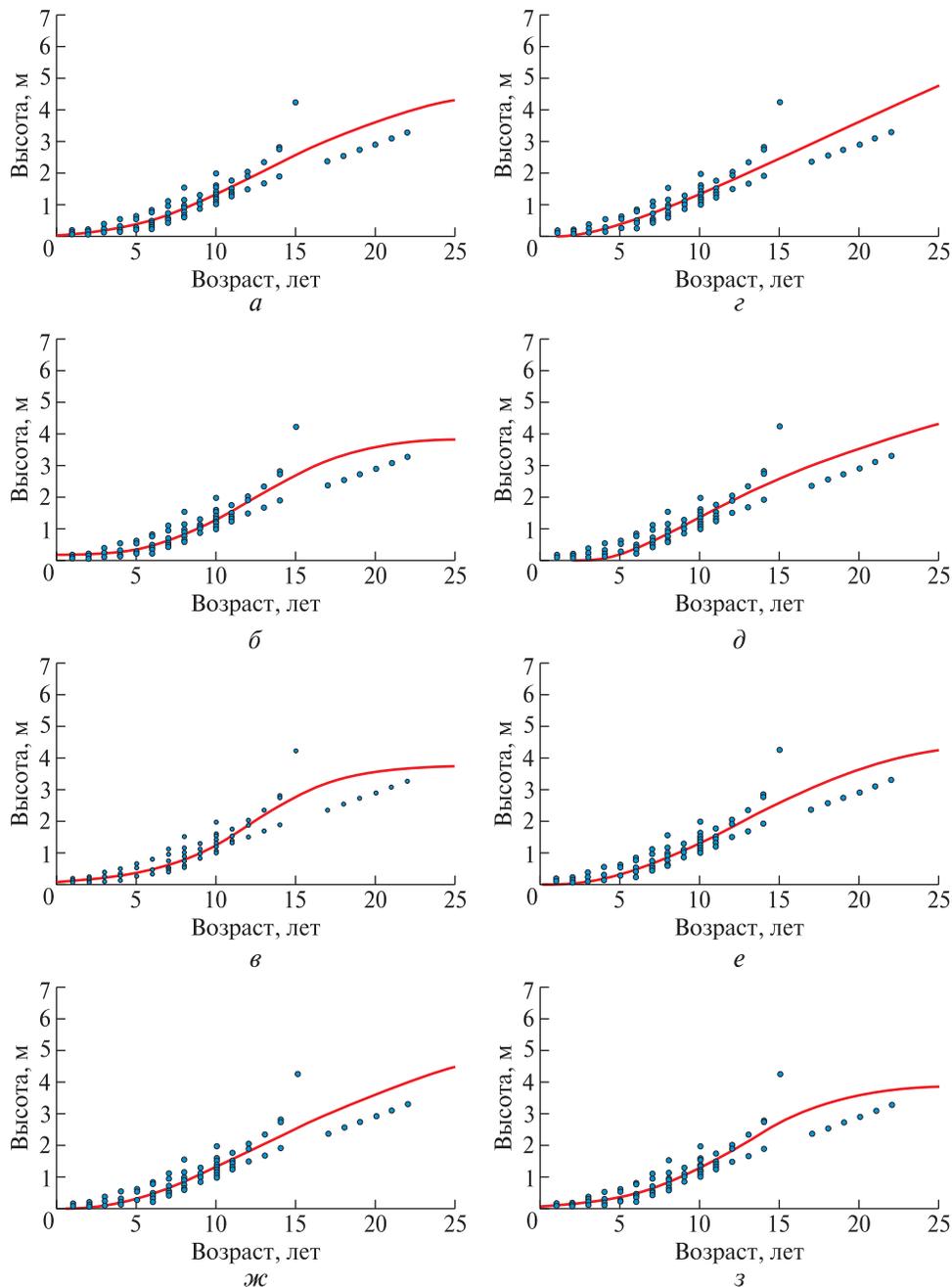


Рис. 1. Корреляция исходных данных сосняка черничного — регрессионная кривая, построенная на основе: *a* — уравнения Гомперца; *б* — уравнения Вейбулла; *в* — уравнения Ричардса; *г* — уравнения Шумахера; *д* — уравнения Теразаки; *е* — уравнения Коллера; *ж* — уравнения Дракина — Вуевского; *з* — логистического уравнения

Fig. 1. Correlation of initial data of blueberry pine - regression curve based on: *a* — Gompertz equation; *б* — Weibull equation; *в* — Richards equation; *г* — Schumacher equation; *д* — Terazaki equation; *е* — Koller equation; *ж* — Drakin-Vuevskii equation; *з* — logistic equation

Следующим этапом в анализе моделей хода роста стало изучение среднего значения высоты в соответствующих возрастных фазах роста и развития, собранных на пробных площадях и данных, полученных в ходе моделирования. Анализ моделей проводился для пяти фаз роста и развития от 1 года до 25 лет. В указанных фазах выбраны оптимальные модели хода роста, моделируемые дан-

ные которых были близки к данным, собранным на пробных площадях по каждой фазе роста и развития.

При выравнивании полученных экспериментальных данных была предпринята попытка описать зависимость хода роста в высоту от времени с помощью уравнений Гомперца, Вейбулла, Ричардса, Дракина — Вуевского и логистического уравнения. По оценкам для каждой из пяти фаз

Т а б л и ц а 3

Сопоставимость прогнозных данных высоты, полученных в результате моделирования, с данными, собранными на пробных площадях

Comparability of predicted height data obtained from modelling with data collected from sample plots

Рост и развитие культур		Средняя высота, по данным, собранным на пробных площадях, м	Модель, созданная на основе уравнений	Прогнозные данные высоты, полученные на основе модели, м
Фаза	Интервал времени, лет			
Приживания	1...3	0,20	Уравнение Вейбулла	0,21
Индивидуального роста	4...10	0,81	Уравнение Дракина — Вуевского	0,71
Смыкания	11...15	1,97	Уравнение Дракина — Вуевского	2,16
Чащи	16...20	2,64	Уравнение Ричардса	3,32
Жердняка	21...25	3,20	Уравнение Ричардса	3,79

Т а б л и ц а 4

Параметры сигмоидных функций хода роста

Sigmoidal functions of growth progress parameters

Рост и развитие культур		Модель, созданная на основе уравнения	Параметр				Стандартная ошибка	Коэффициент детерминации
Фаза	Интервал времени, лет		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>		
Приживания	1...3	Уравнение Вейбулла	0,49	0,37	0,001	5,99	0,071	0,767
Индивидуального роста	4...10	Уравнение Дракина — Вуевского	104,91	0,02	2,29	-	0,296	0,914
Смыкания	11...15							
Чащи	16...20	Уравнение Ричардса	5,94	2,94	0,13	1,19	0,008	0,999
Жердняка	21...25							

роста и развития отобраны модели хода роста (табл. 3).

Результаты сравнительного анализа показывают, что моделирование хода роста описывается различными моделями для каждой фазы роста и развития. Нами уточнены параметры каждой отобранной модели с учетом фазы роста и развития (табл. 4). Успешность отобранных моделей хода роста для каждой фазы роста и развития подтверждается данными полученных статистических оценок модельных древостоев.

Ход роста посадок сосны обыкновенной, произрастающих на территории бывшего Онежского и Холмогорского лесхозов в черничном типе условий местопроизрастания, описывается системой уравнений

$$H(t) = \begin{cases} 0,49 - 0,37e^{-0,001t^{5,99}}, & 1 \leq t \leq 3; \\ 104,91(1 - e^{-0,02t})^{2,29}, & 4 \leq t \leq 15; \\ \frac{5,94}{(1 + e^{2,94 - 0,13t})^{0,84}}, & 16 \leq t \leq 25, \end{cases}$$

где H — возраст древостоя, м;
 t — время, лет.

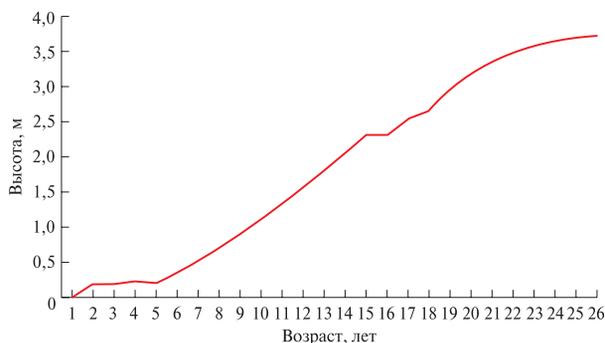


Рис. 2. Ход роста культур сосны обыкновенной, произрастающих на территории северотаежного района в черничном типе условий местопроизрастания

Fig. 2. The growth course of Scots pine growing on the territory of the northern taiga region in the bilberry type growing conditions

Получена математическая модель, отражающая закономерность роста культивируемых древостоев в различных фазах их роста и развития. Кривая роста сосняка черничного, полученная на основе системы уравнений по фазам роста и развития, удовлетворяет представлению S-образной кривой, которая описывает биологический рост растения (рис. 2).

График функции и математическая модель иллюстрирует (см. рис. 2):

– в интервале от 1 до 3 лет наблюдается медленный рост, в этом случае можно говорить либо о неблагоприятных условиях для произрастания культуры, либо о неудовлетворительном качестве посадочного материала;

– в интервале от 4 до 15 лет наблюдается интенсивный рост в высоту, что характерно для фазы интенсивного роста;

– в интервале от 16 до 25 лет рост культур сосны обыкновенной в высоту максимально может составить до 5,94 м.

Для сглаживания интервалов в промежуточных точках между фазами роста и развития графика функции в дальнейшем рекомендуется использовать метод интерполяции.

Выводы

Для исследуемой территории получена модель хода роста культур сосны обыкновенной, произрастающих в черничниках северотаежного района европейской части Российской Федерации.

Предлагаемая авторами модель содержит сигмоидные функции роста. Для описания хода роста культур сосны обыкновенной рекомендуется использовать модель, определяемую как систему уравнений, созданную на основе сигмоидных уравнений. Обсуждение результатов исследования показало, что модель хода роста культур сосны обыкновенной характеризуются достаточно высокими значениями коэффициента детерминации R^2 — от 0,767 до 0,999, а также небольшой величиной стандартной ошибки S — от 0,008 до 0,296.

Выявленные в ходе исследования модели хода роста культур сосны обыкновенной позволяют их использовать для изучения динамики роста и подтверждают их применимость для описания хода роста древостоев в высоту.

Список литературы

- [1] Полетаев И.А. О «формуле роста» Шмальгаузена // Известия СО АН СССР. Серия Биология, 1980. Т. 5, № 1. С. 3–9.
- [2] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
- [3] Verhulst P-F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. [A note on population growth] // Correspondence Mathematiques et Physiques, 1838, v. 10, pp. 113–121.
- [4] Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. М.: Финансы и статистика, 2003. 432 с.
- [5] Иванова Е.Е. Математический анализ функций хода роста по высоте лесных насаждений // Актуальные проблемы развития лесного комплекса: Материалы XX Междунар. науч.-техн. конф., Вологда, 6 декабря 2022 г. Вологда: Изд-во ВоГУ, 2022. С. 42–45.
- [6] Николаева И.О., Соловьев В.М. Классификация особей в хвойных насаждениях естественного происхождения для оценки их изменчивости // Успехи современного естествознания, 2019. № 12. С. 14–19.
- [7] Дубенок Н.Н., Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Изменение роста древостоев лиственницы в Москве по данным долговременных наблюдений // Российская сельскохозяйственная наука, 2022. № 3. С. 56–61.
- [8] Кузьмичев В.В. Закономерности роста древостоев. Новосибирск: Наука, 1977. 158 с.
- [9] Laar A van A. Das Wachstum von Pinus pinaster (Aiton) in Abhängigkeit vom Standraum // Forstw Cbl, 1985, v. 104, pp. 49–61. DOI:10.1007/BF02740703
- [10] Zhang L. Cross-validation of Non-linear Growth Functions for Modelling Tree Height–Diameter Relationships // Annals of Botany, 1997, v. 79, iss. 3, pp. 251–257.
- [11] Руссков В.Г. Тенденции и периодичности роста деревьев сосны по высоте: автореф. ... дис. канд. биол. наук: 06.03.02. Красноярск, Институт леса СО РАН, 2012. 20 с.
- [12] Luo J., Zhang M., Zhou X., Chen J., Tian Y. Tree Height and DBH Growth Model Establishment of Main Tree Species in Wuling Mountain Small Watershed. IOP Conference Series // Earth and Environmental Science, 2018, v. 108, iss. 4, pp. 1–5. DOI:10.1088/1755-1315/108/4/042003
- [13] Richards F.J. A Flexible Growth Function for Empirical Use // J. of Experimental Botany, 1959, v. 10, pp. 290–300. DOI:10.1093/jxb/10.2.290
- [14] Gompertz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1825, v. 115, pp. 513–583. URL: <http://www.jstor.com/stable/107756> (дата обращения 25.12.2022).
- [15] Дракин В.Н., Вуевский Д.И. Новая формула хода роста древостоев по высоте и диаметру и ее применение к исследованию зависимости между высотой и диаметром // Записки Белорусского лесотехнического ин-та, 1940. Вып. V. С. 3–37.
- [16] Weibull W. A statistical distribution of wide applicability // J. of Applied Mechanics, 1951, v. 18, pp. 293–297.
- [17] Кобранов Н.П. Обследование и исследование лесных культур // Труды по лесному опытному делу, 1930. Вып. VIII. С. 1–102.
- [18] Огиевский В.В., Хиров А.А. Обследование и исследование лесных культур. Л.: ЛенНИИЛХ, 1967. 51 с.
- [19] Мерзленко М.Д., Бабич Н.А. Теория и практика выращивания сосны и ели в культурах. Архангельск: Изд-во Архангельского ГТУ, 2002. 220 с.
- [20] Соколов Н.Н. Методические указания к дипломному проектированию по таксации пробных площадей. Архангельск: Изд-во РИО АЛТИ, 1978. 44 с.
- [21] Анучин Н.П. Лесная таксация. М.: Лесн.пром-сть, 1982. 552 с.
- [22] Полевой справочник таксатора: для таежных лесов Европейского Севера / под ред. В.И. Левина. Вологда: Северо-Западное книжное изд-во, 1971. 196 с.
- [23] ОСТ 56-69-83. Площади пробные лесоустроительные. Метод закладки: дата введения 1984-01-01. М.: Изд-во ЦБНТИ Гослесхоза СССР, 1984. 60 с.
- [24] Бабич Н.А., Мочалов Б.А. Лесные культуры в Архангельской области. М.: ЦБНТИлесхоз, 1982. 24 с.
- [25] Бабич Н.А., Беляев В.В. Рост и биологическая продуктивность культур сосны северной подзоны тайги европейского Севера // Лесоводство, лесоразведение, лесопользование: экспресс-информация. М.: Изд-во ЦБНТИлесхоз, 1985. Вып. 4. С. 16–21.
- [26] Ларин В.Б., Паутов Ю.А. Формирование хвойных молодняков на вырубках. Л.: Наука, 1989. 144 с.

Сведения об авторах

Иванова Елена Евгеньевна  — аспирант кафедры ландшафтной архитектуры и искусственных лесов Высшей школы естественных наук и технологий, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (САФУ), e.e.ivanova@narfu.ru

Бабич Николай Алексеевич — д-р с.-х. наук, профессор кафедры ландшафтной архитектуры и искусственных лесов Высшей школы естественных наук и технологий, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (САФУ), n.babich@narfu.ru

Поступила в редакцию 12.01.2023.

Одобрено после рецензирования 15.06.2023.

Принята к публикации 18.07.2023.

SIGMOID FUNCTIONS IN MODELING SCOTS PINE GROWTH COURSE IN HEIGHT

E.E. Ivanova , **N.A. Babich**

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, 17, Naberezhnaya Severnoy Dviny st., 163002, Arkhangelsk, Russia

e.e.ivanova@narfu.ru

The results of the analysis and applicability of sigmoid functions for studying the Scots pine crops growth on the territory of the North taiga region of the European part of the Russian Federation in the blueberry type growing conditions are presented. A computational procedure for finding models of forest crop growth progress is proposed. The growth progress model reflects the relationship between age and height of a tree and contains sigmoidal growth progress functions in its description. Sigmoid functions were selected for each of the five growth phases and development of the stand as a result of regression analysis. In general, the model of the Scots pine crops growth course in bilberry forests of the northern taiga region of the European part of the Russian Federation represents a system of equations based on the Weibull, Drakin-Vuevskii and Richards equations.

Keywords: tree growth course, modeling, sigmoid function of growth course, Scots pine crops, mathematical model

Suggested citation: Ivanova E.E., Babich N.A. *Sigmoidnye funktsii v modelirovanii khoda rosta po vysote kul'tur sosny obyknovennoy* [Sigmoid functions in modeling Scots pine growth course in height]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2023, vol. 27, no. 5, pp. 109–116. DOI: 10.18698/2542-1468-2023-5-109-116

References

- [1] Poletaev I.A. *O «formule rosta» Shmal'gauzena* [On Schmalhausen's «growth formula»]. *Izvestiya SO AN SSSR. Seriya Biologiya* [Proceedings of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, series Biology], 1980, v. 5, no. 1, pp. 3–9.
- [2] Bratus' A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P. *Dinamicheskie sistemy i modeli biologii* [Dynamic systems and models of biology]. Moscow: Fizmatlit, 2010, 400 p.
- [3] Verhulst P-F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. [A note on population growth]. *Correspondence Mathematiques et Physiques*, 1838, v. 10, pp. 113–121.
- [4] Berezhnaya E.V., Berezhnoy V.I. *Matematicheskie metody modelirovaniya ekonomicheskikh sistem* [Mathematical methods for modeling economic systems]. Moscow: Finance and statistics, 2003, 432 p.
- [5] Ivanova E.E. *Matematicheskiy analiz funktsiy khoda rosta po vysote lesnykh nasazhdeniy* [Mathematical analysis of the functions of the course of growth along the height of forest plantations]. *Aktual'nye problemy razvitiya lesnogo kompleksa: materialy XX Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii, Vologda, 6 dekabrya 2022 g.* [Actual problems of the development of the forest complex: materials of the XX International Scientific and Technical Conference], Vologda, December 6, 2022. Vologda: VSU, 2022, pp. 42–45.
- [6] Nikolaeva I.O., Solov'ev V.M. *Klassifikatsiya osobey v khvoynykh nasazhdeniyakh estestvennogo proiskhozhdeniya dlya otsenki ikh izmenchivosti* [Classification of individuals in coniferous plantations of natural origin to assess their variability]. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya* [Successes of modern natural sciences], 2019, no. 12, pp. 14–19.
- [7] Dubenok N.N., Lebedev A.V., Kuz'michev V.V. *Izmenenie rosta drevostoev listvennitsy v Moskve po dannym dolgovremennykh nablyudeni* [Changes in the growth of larch stands in Moscow according to long-term observations]. *Rossiyskaya sel'skokhozyaystvennaya nauka* [Russian Agricultural Science], 2022, no. 3, pp. 56–61.
- [8] Kuz'michev V.V. *Zakonomernosti rosta drevostoev* [Patterns of growth of forest stands]. Novosibirsk: Science, 1977, 158 p.
- [9] Laar A van A. Das Wachstum von Pinus pinaster (Aiton) in Abhängigkeit vom Standraum. *Forstw Cbl*, 1985, v. 104, pp. 49–61. DOI:10.1007/BF02740703
- [10] Zhang L. Cross-validation of Non-linear Growth Functions for Modelling Tree Height–Diameter Relationships. *Annals of Botany*, 1997, v. 79, iss. 3, pp. 251–257.

- [11] Russkov V.G. *Tendentsii i periodichnosti rosta derev'ev sosny po vysote* [Tendencies and periodicity of growth of pine trees in height]. Dis. Cand. Sci. (Biol.): 06.03.02. Krasnoyarsk: Forest Institute SB RAS, 2012, 20 p.
- [15] Drakin V.N., Vuvskiy D.I. *Novaya formula khoda rosta drevostoev po vysote i diametru i ee primeneniye k issledovaniyu zavisimosti mezhdu vysotoy i diametrom* [A new formula for the course of growth of forest stands in height and diameter and its application to the study of the relationship between height and diameter]. Zapiski Belorusskogo lesotekhnicheskogo in-ta [Notes of the Belarusian Forestry Institute], 1940, iss. V, pp. 3–37.
- [16] Weibull W. A statistical distribution of wide applicability. J. of Applied Mechanics, 1951, v. 18, pp. 293–297.
- [17] Kobranov N.P. *Obsledovanie i issledovanie lesnykh kul'tur* [Survey and research of forest crops]. Trudy po lesnomu opytному delu [Proceedings on experimental forestry], 1930, iss. VIII, pp. 1–102.
- [18] Ogievskiy V.V., Khirov A.A. *Obsledovanie i issledovanie lesnykh kul'tur* [Inspection and research of forest crops]. Leningrad: LenNIILKh, 1967, 51 p.
- [19] Merzlenko M.D., Babich N.A. *Teoriya i praktika vyrashchivaniya sosny i eli v kul'turakh* [Theory and practice of growing pine and spruce in crops]. Arkhangelsk: Publishing House of the Arkhangelsk State Technical University, 2002, 220 p.
- [20] Sokolov N.N. *Metodicheskie ukazaniya k diplomnomu proektirovaniyu po taksatsii probnykh ploshchadey* [Guidelines for graduation design on the taxation of trial plots]. Arkhangelsk: RIO ALTI, 1978, 44 p.
- [21] Anuchin N.P. *Lesnaya taksatsiya* [Forest taxation]. Moscow: Lesnaya prom-st, 1982, 552 p.
- [22] *Polevoy spravochnik taksatora: dlya taezhnykh lesov Evropeyskogo Severa* [Taxator's field guide: for the taiga forests of the European North]. Ed. V.I. Levin. Vologda: North-West book publishing house, 1971, 196 p.
- [23] OST 56-69-83 *Ploshchadi probnye lesoustroitel'nye. Metod zakladki* [Trial forest inventory areas. Bookmark method: introduction date 1984-01-01]. Moscow: TsBNTI Gosleskhoz USSR, 1984, 60 p.
- [24] Babich N.A., Mochalov B.A. *Lesnye kul'tury v Arkhangel'skoy oblasti* [Forest crops in the Arkhangelsk region]. Moscow: TsBNTILeskhkh, 1982, 24 p.
- [25] Babich N.A., Belyaev V.V. *Rost i biologicheskaya produktivnost' kul'tur sosny severnoy podzony taygi evropeyskogo Severa* [Growth and biological productivity of pine crops in the northern subzone of the taiga of the European North]. Lesovodstvo, lesorazvedeniye, lesopol'zovanie: ekspress-informatsiya [Silviculture, afforestation, forest management: express information]. Moscow: TsBNTILeskhkh, 1985, iss. 4, pp. 16–21.
- [26] Larin V.B., Pautov Yu.A. *Formirovaniye khvoynnykh molodnyakov na vyrubkakh* [Formation of coniferous young forests in clearings]. Leningrad: Nauka, 1989, 144 p.

Authors' information

Ivanova Elena Evgen'evna  — pg. of the Department of Landscape Architecture and Artificial Forests of the Higher School of Natural Sciences and Technologies, the Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (SAFU), e.e.ivanova@narfu.ru

Babich Nikolay Alekseevich — Dr. Sci. (Agriculture), Professor of the Department of Landscape Architecture and Artificial Forests of the Higher School of Natural Sciences and Technologies, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (SAFU), n.babich@narfu.ru

Received 12.01.2023.

Approved after review 15.06.2023.

Accepted for publication 18.07.2023.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article
The authors declare that there is no conflict of interest