

## ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАМЕТРОВ ДЕРЕВЬЕВ В СОСНОВЫХ ДРЕВОСТОЯХ

А.В. Лебедев

Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева, 127550, Москва, Тимирязевская ул., д. 49

alebedev@rgau-msha.ru

Представлена обобщенная статистическая модель распределения диаметров стволов деревьев для лесных культур сосны, разработанная на основе трехпараметрической функции Вейбулла. Ее параметры восстановлены с использованием данных по 231 ряду распределения на 24 постоянных пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева из первого и второго центральных моментов распределения. Показано, что их оценки могут быть получены из уравнений связи со среднеквадратическим диаметром стволов в древостое. Выявлено, что разработанная модель с высокой точностью аппроксимирует фактические распределения диаметров стволов деревьев в приспевающих, средневозрастных и спелых древостоях, а в молодняках возможны отклонения между фактическими и предсказанными значениями частот. Показано, что основным назначением разработанной модели является прогнозирование распределений диаметров стволов деревьев в будущих возрастах древостоев для оптимизации процессов управления лесными насаждениями.

**Ключевые слова:** обобщенная модель, распределение диаметров, распределение Вейбулла, сосновый древостой

**Ссылка для цитирования:** Лебедев А.В. Обобщенная модель распределения диаметров деревьев в сосновых древостоях // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2022. Т. 26. № 4. С. 53–62.  
DOI: 10.18698/2542-1468-2022-4-53-62

При переходе к интенсивной форме ведения лесного хозяйства первоочередными становятся размеры отдельных деревьев, а не средних значений таксационных показателей древостоев. Определение распределения диаметров стволов в конкретном древостое при проведении таксационных работ относится к трудоемкому процессу, связанному с измерением диаметров на высоте 1,3 м от поверхности земли для большого количества деревьев [1, 2].

В практике инвентаризации лесов для снижения затрат инструментально измеряются только отдельные характеристики древостоев, например, средний квадратический диаметр, сумма площадей сечений, средняя высота и др. Модели распределения диаметров могут использоваться для оценки количества деревьев, встречающихся в разных ступенях (классах) толщины. По заключенной в них информации о размерной структуре деревьев можно дать более точную стоимостную оценку запаса древостоя. Информацию о распределении диаметров стволов деревьев можно применять при планировании лесозаготовительных работ, прогнозировании роста лесов и в целом для повышения их продуктивности [3–5].

Модели распределения диаметров обычно основаны на теоретических функциях распределения, например, нормального [6, 7], обобщенного нормального [8], логнормального [9],

бета-распределения [10], распределения Вейбулла [11–13], SB-Джонсона [14, 15] и др. Известны подходы оценивания распределений, основанные на непараметрических методах [12, 16, 17].

Из перечисленных выше методов только функция Вейбулла получила наибольшее распространение для моделирования унимодальных распределений вследствие своей гибкости в подгонке кривых различной формы, простоте оценки параметров [18].

### Цель работы

Цель работы — разработка обобщенной модели распределения диаметров стволов деревьев в сосновых древостоях с использованием трехпараметрической функции Вейбулла.

### Материалы и методы

Основой исследования послужили материалы обмеров деревьев в лесных культурах сосны Лесной опытной дачи Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева. Лесные культуры были заложены в последней четверти XIX в. под руководством М.К. Турского [19–21].

В исследовании использованы данные по 231 ряду распределения диаметров стволов деревьев на 24 постоянных пробных площадях с начальной густотой посадки от 4 до 32 тыс. шт. на 1 га. На пробных площадях начиная с 1910-х гг. с периодичностью один раз в 5...10 лет проводился

обмер диаметров стволов всех деревьев с помощью мерной вилки. Диапазон возраста древостоев составил от 20 до 140 лет, средние диаметры стволов — от 6 до 40 см.

В качестве базовой модели распределения деревьев по диаметру стволов принята трехпараметрическая функция Вейбулла, которая во многих исследованиях показывала лучший по сравнению с другими моделями результат при выравнивании эмпирических распределений [18]. Главным преимуществом функции Вейбулла считается, что ее параметры хорошо коррелируют с таксационными показателями древостоя и являются биологически интерпретируемыми [22]. Это дает возможность прогнозирования распределения диаметров стволов для будущих возрастов древостоев [23, 24]. В трехпараметрической форме распределение задается параметрами смещения, масштаба и формы. Параметр смещения равен минимальному диаметру в древостое. При распределении деревьев по ступеням толщины его можно принять равным левой границе первой ступени толщины. Плотность вероятности  $f(x)$  трехпараметрической функции имеет вид

$$f(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right);$$

$$x \geq 0, b, c > 0,$$

а функция распределения  $F(x)$  записывается как

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right);$$

$$x \geq 0, b, c > 0,$$

где  $x$  — диаметр на высоте 1,3 м, см;

$a$  — параметр смещения;

$b$  — параметр масштаба;

$c$  — параметр формы.

К распространенным способам оценивания параметров при моделировании распределения деревьев относится метод восстановления параметров, который используют в исследованиях, например, Т.В. Stankova и Т.М. Zlatanov [25], J.J. Gorgoso и соавт. [26], F.N. Ogana и соавт. [27], А. Ciseu и соавт. [12]. Данный метод позволяет получить равенство фактического и рассчитанного по модели среднеквадратического диаметра. Первый ( $m_1$ ) и второй ( $m_2$ ) центральные моменты передаются формулами:

$$m_1 = b \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right) + a, \quad (1)$$

$$m_2 = b^2 \cdot \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right), \quad (2)$$

где  $\Gamma(\dots)$  — гамма-функция.

Преобразуя уравнение (1) через параметр  $b$  и подставляя результат в уравнение (2), получаем:

$$b = \frac{m_1 - a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)}, \quad (3)$$

$$m_2 = \frac{(m_1 - a)^2}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)} \cdot \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right). \quad (4)$$

Когда известны первый и второй моменты, выражение (4) зависит только от параметра  $c$ , который можно найти итеративно из уравнения

$$\frac{(m_1 - a)^2}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)} \cdot \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right) - m_2 = 0.$$

Параметр  $b$  при известном параметре  $c$  можно рассчитать по уравнению (3).

В методе восстановления параметров моменты  $m_1$  и  $m_2$  можно оценить по характеристикам древостоя [12, 18, 25]. Первый момент ( $m_1$ ) является средним арифметическим значением, которое линейно зависит от среднеквадратического диаметра ( $QMD$ ):

$$m_1 = a + b \cdot QMD,$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты линейного уравнения.

Второй центральный момент  $m_2$  является дисперсией и рассчитывается по формуле

$$m_2 = QMD^2 - m_1^2.$$

Результаты аппроксимации функций распределения сравнивали с помощью таких показателей, как квадратный корень из среднеквадратической ошибки ( $RMSE$ ), средняя абсолютная ошибка ( $MAE$ ), среднее смещение ошибок ( $MBE$ ):

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}},$$

$$MAE = \frac{\sum |y_i - \hat{y}_i|}{n},$$

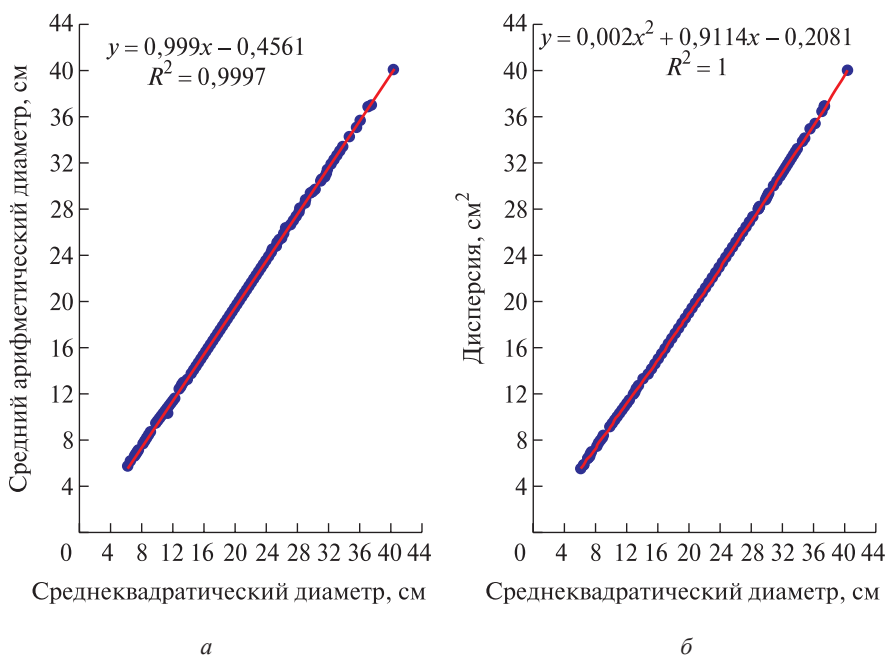
$$MBE = \frac{\sum (\hat{y}_i - y_i)}{n},$$

где  $n$  — количество наблюдений;

$y_i$  — фактическое значение;

$\hat{y}_i$  — предсказанное по модели значение.

Степень соответствия (на 5%-м уровне значимости) исследуемых моделей реальным данным оценивалась путем сравнения эмпирической функции распределения с предсказанной. Статистика Колмогорова — Смирнова  $D_n$  была рассчитана для максимального абсолютного расстояния между наблюдаемыми и прогнозируемыми значениями функций распределения [18, 28]



**Рис. 1.** Зависимость первого (а) и второго (б) моментов распределения Вейбулла от среднеквадратического диаметра  
**Fig. 1.** Dependence of the first (а) and second (б) moments of the Weibull distribution on the quadratic mean diameter

$$D_n = \sup_x |F(x_i) - F_0(x_i)|,$$

где  $F(x_i)$  — кумулятивное частотное распределение, наблюдаемое для элемента выборки  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

$F_0(x_i)$  — вероятность теоретического кумулятивного распределения частот.

Кроме того, применялся  $\chi^2$ -тест в качестве критерия согласия для сопоставления плотностей вероятности диаметров при 5%-м уровне значимости. В соответствии с теоретическим распределением диаметров критерий  $\chi^2$  с  $m - k - 1$  степенями свободы ( $k$  — количество параметров распределения) рассчитывается следующим образом [29, 30]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i},$$

где  $m$  — количество ступеней толщины;

$n_i$  — фактическое количество деревьев в  $i$ -й ступени толщины;

$\hat{n}_i$  — теоретическое количество деревьев в  $i$ -й ступени толщины.

Анализ данных проводился с использованием языка программирования Python 3.5 с библиотеками NumPy 1.17.1 и SciPy 1.3.2.

### Результаты исследования

Для лесных культур сосны Лесной опытной дачи Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева (далее — Лесная опытная дача) значение первого центрального момента  $m_1$  распределения Вейбулла,

необходимого для определения параметров масштаба и формы, рассчитывается по эмпирической формуле (рис. 1)

$$m_1 = -0,456 + 0,999 \cdot QMD.$$

Взаимосвязь между первым центральным моментом и среднеквадратическим диаметром является статистически значимой ( $F = 708703,0$  при  $p < 0,0001$ ), при этом численные оценки константы ( $t = -17,4$  при  $p < 0,0001$ ) и углового коэффициента ( $t = 841,8$  при  $p < 0,0001$ ) значительно отличаются от нуля. Скорректированный коэффициент детерминации ( $R^2$ -adj.) составил 0,9997. После проведения соответствующих замен уравнение для второго центрального момента  $m_2$  приняло следующий вид (см. рис. 1)

$$m_2 = QMD^2 - (-0,456 + 0,999 \times QMD)^2.$$

Взаимосвязь между минимальным ( $d_{\min}$ ) и максимальным ( $d_{\max}$ ) диаметрами со среднеквадратическим диаметром может быть описана линейной функцией (рис. 2):

$$d_{\min} = -3,957 + 0,740 \times QMD, \quad (5)$$

$$d_{\max} = 8,240 + 1,142 \times QMD. \quad (6)$$

Оба уравнения являются статистически значимыми: для минимального диаметра —  $F = 2263,7$  при  $p < 0,0001$ , для максимального диаметра —  $F = 2323,9$  при  $p < 0,0001$ . Оценки параметров достоверно отличаются от нуля при  $p < 0,0001$ .

Статистики соответствия обобщенной модели экспериментальным данным  
Generalized Model Correspondence Statistics to Experimental Data

QMD, см	Тест Колмогорова — Смирнова		$\chi^2$ -тест		RMSE	MAE	MBE	n
	Статистика	Значимость при $\alpha = 0,05$ , %	Статистика	Значимость при $\alpha = 0,05$ , %				
6...10	0,105	0	46,526	19	0,045	0,034	0,032	16
10...14	0,111	25	40,701	36	0,049	0,036	0,031	28
14...18	0,118	60	44,549	48	0,044	0,035	0,028	42
18...22	0,134	83	32,290	47	0,045	0,036	0,022	47
22...26	0,129	100	35,242	46	0,047	0,038	0,022	36
26...30	0,140	97	40,204	37	0,050	0,043	0,021	30
30...34	0,163	73	19,393	64	0,079	0,062	0,055	22
34...38	0,211	100	10,264	50	0,089	0,075	0,055	6
38...42	0,203	100	8,322	50	0,088	0,087	0,087	4
Итого	0,135	68	37,285	31	0,053	0,042	0,027	231

Примечание: QMD — среднеквадратический диаметр; RMSE — квадратный корень из среднеквадратической ошибки; MAE — средняя абсолютная ошибка; n — количество наблюдений.

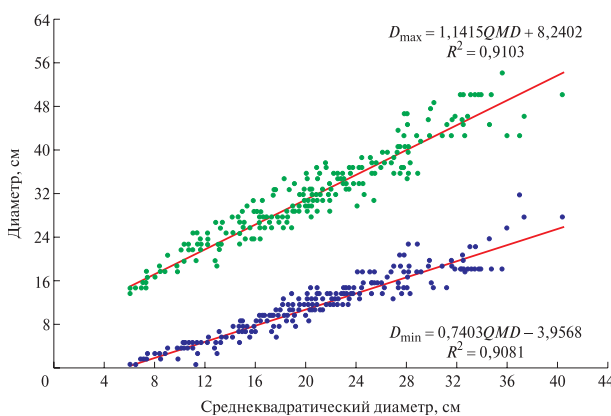


Рис. 2. Зависимость минимального и максимального диаметров от среднеквадратического  
Fig. 2. Dependence of the minimum and maximum diameters on the quadratic mean diameter

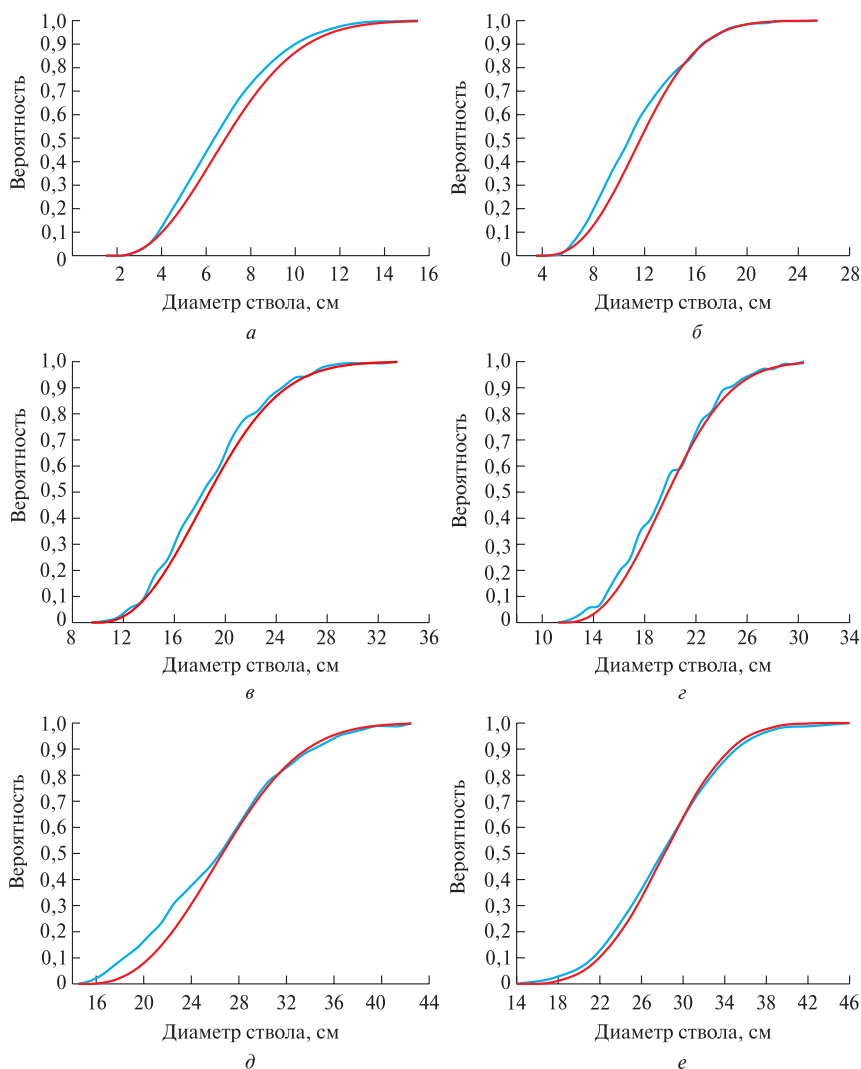
Скорректированный коэффициент детерминации для уравнения (5) равен 0,908, для уравнения (6) — 0,910.

Уравнение (5) позволяет рассчитывать параметр смещения *a* трехпараметрического распределения Вейбулла. Минимальное значение диаметра соответствует нулевому значению функции распределения. Для максимального значения диаметра, вычисляемого по уравнению (6), функция распределения должна принимать значение, близкое к единице.

Вычисленные усредненные статистики соответствия обобщенной модели экспериментальным данным представлены в таблице. Тест Колмогорова — Смирнова, используемый для сравнения эмпирических и прогнозируемых функций распределений, показал, что обобщенная модель точно отражает распределение

диаметров в 68 % случаев, а  $\chi^2$ -тест, применяемый для сравнения эмпирических и прогнозируемых плотностей вероятности — только в 31 % случаев при уровне значимости 0,05. Доля случаев, в которых нулевая гипотеза о соответствии распределений не была отклонена, зависит от среднеквадратического диаметра древостоев. Так, для теста Колмогорова — Смирнова наилучшее соответствие выявлено для среднеквадратических диаметров от 18 до 42 см (в 73...100 % случаев), а для  $\chi^2$ -теста — от 14 до 26 см (46...48 % случаев) и от 30 до 42 см (в 50...64 % случаев). Для молодых древостоев со средним диаметром стволов до 14 см модель показала плохие результаты. Однако метрики качества (RMSE, MAE, MBE), рассчитанные для эмпирических и прогнозируемых функций распределения, демонстрируют их увеличение при повышении среднеквадратического диаметра. Таким образом, результаты моделирования для всех возрастных этапов роста древостоев можно считать приемлемыми.

На рис. 3, 4 представлены примеры эмпирических (синий цвет) и прогнозируемых (красный цвет) функций распределения и плотностей вероятности диаметров стволов для соснового древостоя различных возрастов на постоянной пробной площади 4/Б Лесной опытной дачи. Из этих рисунков следует, что у древостоя в возрасте 21 года и 39 лет имеются отклонения фактических значений от прогнозируемых: по тестам Колмогорова — Смирнова и  $\chi^2$  нулевая гипотеза о соответствии распределений отклоняется в пользу альтернативной при уровне значимости 0,05 (главным образом, за счет сравнительно небольшого числа степеней свободы).



**Рис. 3.** Соответствие эмпирических и прогнозируемых функций распределения (пробная площадь 4/Б) диаметров стволов деревьев в древостоях с различным возрастом: а — 21 год ( $KS = 0,098$ ;  $p = 3,33e-12$ ); б — 39 лет ( $KS = 0,103$ ;  $p = 6,38e-05$ ); в — 59 лет ( $KS = 0,060$ ;  $p = 0,58$ ); г — 79 лет ( $KS = 0,083$ ;  $p = 0,43$ ); д — 102 года ( $KS = 0,100$ ;  $p = 0,34$ ); е — 114 лет ( $KS = 0,154$ ;  $p = 0,02$ )

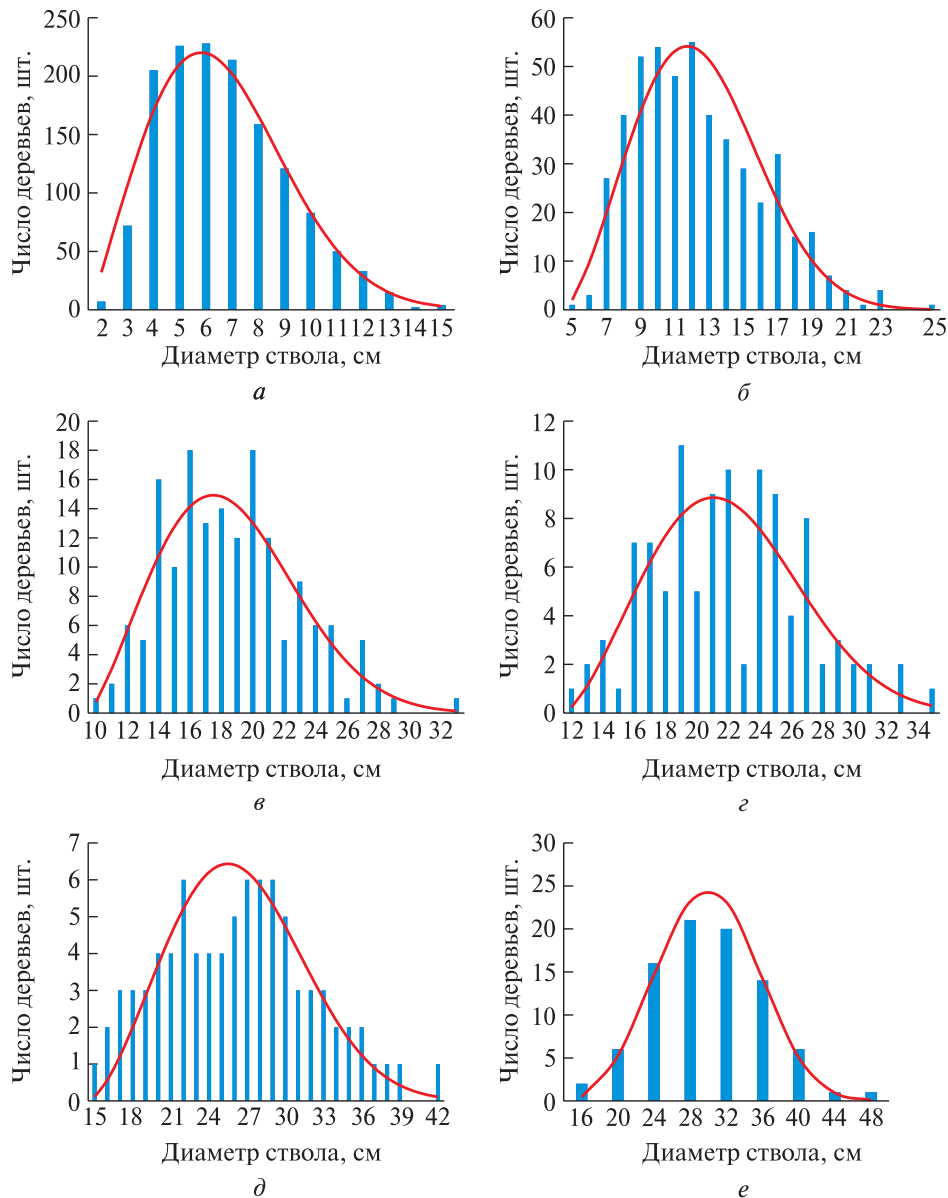
**Fig. 3.** Correspondence of empirical and predicted distribution functions (trial plot 4/Б) of tree trunk diameters in forest stands with different ages: а — 21 years ( $KS = 0,098$ ;  $p = 3,33e-12$ ); б — 39 years old ( $KS = 0,103$ ;  $p = 6,38e-05$ ); в — 59 years old ( $KS = 0,060$ ;  $p = 0,58$ ); г — 79 years old ( $KS = 0,083$ ;  $p = 0,43$ ); д — 102 years ( $KS = 0,100$ ;  $p = 0,34$ ); е — 114 years ( $KS = 0,154$ ;  $p = 0,02$ )

Тем не менее визуальный анализ показывает, что смоделированные кривые отражают закономерности распределения диаметров стволов в эмпирических данных. В возрасте древостоя 59, 79 и 102 лет нулевая гипотеза о соответствии распределений не была отклонена при уровне значимости 0,05. В возрасте древостоя 114 лет получено  $p$ -значение  $< 0,05$ , что связано с уменьшением числа степеней свободы вследствие укрупнения ступеней толщины в результате снижения количества растущих деревьев. При уровне значимости 0,01 в этом случае нулевая гипотеза соответствия смоделированных кривых фактическим данным не отклоняется.

## Обсуждение результатов

Разработанная обобщенная модель распределения деревьев по толщине в культурах сосны в сочетании с моделями зависимости высоты деревьев от диаметров стволов могут служить полезным инструментом по управлению лесными насаждениями, давая возможность получать структуру запаса. Ранние модели частот встречаемости диаметров стволов деревьев для прогноза использовали среднеквадратический диаметр, который относится к основным показателям древостоев в лесном хозяйстве. В последние годы возрастает интерес к среднеквадратическому





**Рис. 4.** Соответствие эмпирических и прогнозируемых функций распределения (пробная площадь 4/Б) диаметров стволов деревьев в древостоях с различным возрастом: *a* — 21 год ( $KS = 0,098$ ;  $p = 3,33e-12$ ); *б* — 39 лет ( $KS = 0,103$ ;  $p = 6,38e-05$ ); *в* — 59 лет ( $KS = 0,060$ ;  $p = 0,58$ ); *г* — 79 лет ( $KS = 0,083$ ;  $p = 0,43$ ); *д* — 102 года ( $KS = 0,100$ ;  $p = 0,34$ ); *е* — 114 лет ( $KS = 0,154$ ;  $p = 0,02$ )

**Fig. 4.** Correspondence of empirical and predicted probability density functions (trial plot 4/Б) of diameters of tree trunks in forest stands with different ages: *a* — 21 years ( $\chi^2 = 44,7$ ;  $p = 5,46e-06$ ); *б* — 39 years ( $\chi^2 = 52,0$ ;  $p = 6,71e-05$ ); *в* — 59 years ( $\chi^2 = 22,2$ ;  $p = 0,39$ ); *г* — 79 years ( $\chi^2 = 25,2$ ;  $p = 0,24$ ); *д* — 102 years ( $\chi^2 = 26,32$ ;  $p = 0,39$ ); *е* — 114 years ( $\chi^2 = 16,02$ ;  $p = 0,01$ )

диаметру как к показателю для прогнозирования распределения деревьев по толщине [18, 25, 31]. В некоторых работах [18, 32] подчеркивается, что эмпирические модели не должны быть сложными, особенно если их назначением является применение в практике лесного хозяйства, а не в научных исследованиях. Полученная обобщенная модель соответствует этому требованию. Дискуссионным остается вопрос выбора двух- или трехпараметрической функции Вейбулла.

Нет единого мнения относительно лучшей и универсальной параметрической функции распределения деревьев по диаметрам стволов. Как правило, для каждой древесной породы в определенных лесорастительных условиях рассматривается несколько моделей, из которых выбирается более соответствующая. В разных исследованиях приводятся результаты анализов для распределения Вейбулла, которые показывают, что предпочтительными являются либо двухпараметрическая [33],

либо трехпараметрическая функции [34]. Однако в случае значительного смещения распределения деревьев по диаметрам стволов в крупные ступени толщины (например, в результате проведения рубок или воздействия неблагоприятных природных факторов) двухпараметрическая модель уступает трехпараметрической. Кроме того, различаются мнения об использовании в моделировании или теоретических функций распределения, или непараметрических способов, в которых нет необходимости априори принимать какую-либо теоретическую форму функции, и поэтому их можно использовать для моделирования распределений любой формы. М. Maltamo и соавт. [33] отмечают, что нет математических, и особенно биологических оснований для предположения какого-либо теоретического распределения диаметров стволов деревьев.

В недавних работах, посвященных распределению диаметров стволов деревьев в древостоях, применяются инструменты дистанционного зондирования [35, 36]. Тем не менее на текущем этапе технологического развития все еще существует необходимость оценивания этих распределений косвенно с помощью прогностических моделей [2]. Эмпирические модели могут оказать ценную помощь современным цифровым технологиям в представлении распределения диаметров стволов деревьев. При этом основным применением разработанных моделей является прогнозирование будущих распределений диаметров стволов деревьев для оптимизации процессов управления лесными насаждениями. Для решения этой задачи в модель распределения необходимо включить прогнозируемые изменения среднеквадратического диаметра.

## Выводы

На основе трехпараметрической функции Вейбулла разработана обобщенная модель распределения диаметров стволов деревьев для разновозрастных сосновых древостоев искусственного происхождения. Полученная модель позволяет рассчитывать частоту встречаемости деревьев по ступеням толщины стволов, только на основании значений среднеквадратического диаметра стволов деревьев древостоя, который относится к одним из главных таксационных показателей. Разработанная модель с высокой точностью аппроксимирует фактические распределения диаметров стволов деревьев в приспевающих, средневозрастных и спелых древостоях. В молодняках возможны отклонения между фактическими и прогнозируемыми значениями частот, но в то же время смоделированные кривые способны достаточно точно передавать форму эмпирических распределений диаметров стволов деревьев.

## Список литературы

- [1] Mehtätalo L. An algorithm for ensuring compatibility between estimated percentiles of diameter distribution and measured stand variables // *Forest Science*, 2004, no. 50(1), pp. 20–32. DOI: 10.1093/forestscience/50.1.20
- [2] Maltamo M., Mehtätalo L., Valbuena R., Vauhkonen J., Packalen P. Airborne laser scanning for tree diameter distribution modelling: a comparison of different modelling alternatives in a tropical single-species plantation // *Forestry*, 2018, no. 91(1), pp. 121–131. DOI: 10.1093/forestry/cpx041
- [3] Baile R.L., Dell T.R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function // *Forest Science*, 1973, no. 19, pp. 97–104.
- [4] Hyink D.M., Moser J.W. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions // *Forest Science*, 1983, no. 29, pp. 85–95.
- [5] Lei X., Peng C., Wang H., Zhou X. Individual height-diameter models for young black spruce (*Picea mariana*) and jack pine (*Pinus banksiana*) plantations in New Brunswick, Canada // *Forest. Chron.*, 2009, no. 85, pp. 43–56. DOI: 10.5558/tfc85043-1
- [6] Ochał W., Pajak M., Pietrzykowski M. Diameter structure of selected pine stands growing on post-mining sites reclaimed for forestry // *Sylwan*, 2010, no. 154, pp. 323–332.
- [7] Иванова Н.С., Мазуркин П.М. Распределение деревьев березы на лесосеке по ступеням толщины и товарности // *ИВУЗ Лесной журнал*, 2007. № 6. С. 58–63.
- [8] Черных В.Л., Черных Л.В., Черных Д.В. Унифицированный алгоритм расчета товарной и сортиментной структуры запаса древостоев // *Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Лес. Экология. Природопользование*, 2020. № 2 (46). С. 27–45. DOI: 10.25686/2306-2827.2020.2.27
- [9] Bliss C.I., Reinker K.A. A Lognormal Approach to Diameter Distributions in Even-Aged Stands // *Forest Science*, 1964, v. 10, iss. 3, pp. 350–360. DOI: 10.1093/forestscience/10.3.350
- [10] Maltamo M., Puumalainen J., Päivinen R. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies* // *Scandinavian J. of Forest Research*, 1995, no. 10, pp. 284–295.
- [11] Ставрова Н.И., Горшков В.В., Катюнин П.Н. Динамика распределения особей в популяциях ели сибирской и березы пушистой по величине диаметра ствола в процессе послепожарных сукцессий северотаежных еловых лесов // *Лесоведение*, 2010. № 3. С. 21–31.
- [12] Ciceu A., Pitar D., Badea O. Modeling the Diameter Distribution of Mixed Uneven-Aged Stands in the South Western Carpathians in Romania // *Forests*, 2021, no. 12, id. 958. DOI: 10.3390/f12070958
- [13] Baile R.L., Dell T.R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function // *Forest Science*, 1973, no. 19, pp. 97–104.
- [14] Fonseca T.F., Marques C.P., Parresol B.R. Describing Maritime Pine diameter distribution with Johnson's SB distribution using a new all-parameter recovery approach // *Forest Science*, 2009, no. 55, pp. 367–373.
- [15] Mateus A., Tomé M. Modelling the diameter distribution of eucalyptus plantations with Johnson's SB probability density function: Parameters recovery from a compatible system of equations to predict stand variables // *Ann. For. Sci.* 2011, no. 68, pp. 325–335.
- [16] Borders B.E., Souter R.A., Bailey R.L., Ware K.D. Percentile-based distributions characterize forest stand tables // *Forest Science*, 1987, no. 33, pp. 570–576.

- [17] Хлюстов В.К., Лебедев А.В. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования. Иркутск: Мегапринт, 2017, 328 с.
- [18] Pogoda P., Ochał W., Orzeł S. Modeling Diameter Distribution of Black Alder (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) Stands in Poland // *Forests*, 2019, no. 10, id 412. DOI: 10.3390/f10050412
- [19] Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в Лесной опытной даче Тимирязевской сельскохозяйственной академии. М.: Наука, 2020. 382 с.
- [20] Дубенок Н.Н., Кузьмичев В.В., Лебедев А.В. Рост и продуктивность древостоев сосны и лиственницы в условиях городской среды // *Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Лес. Экология. Природопользование*, 2018. № 1(37). С. 54–71. DOI 10.15350/2306-2827.2018.1.54
- [21] Наумов В.Д., Поветкина Н.Л., Лебедев А.В., Гемонов А.В. Географические культуры сосны в лесной опытной даче Тимирязевской академии: к 180-летию М.К. Турского. М.: Изд-во МЭСХ, 2019. 182 с.
- [22] Третьяков В.А. Динамика распределения деревьев по диаметрам в густых культурах сосны, ели и кедра // *Лесоведение*, 2005. № 5. С. 72–74.
- [23] Soares T.S., Leite H.G., Soares C.P.B., Vale A.B. Comparação de diferentes abordagens na modelagem da distribuição diamétrica // *Floresta*, 2010, № 40(4), pp. 731–738. DOI: 10.5380/rf.v40i4.20325
- [24] Miranda R., Fiorentin L., Netto S.P., Juvanhol R., Corte A.D. Prediction System for Diameter Distribution and Wood Production of Eucalyptus // *Floresta Ambient*, 2018, no. 25(3). DOI: 10.1590/2179-8087.054816
- [25] Stankova T.V., Zlatanov T.M. Modeling diameter distribution of Austrian black pine (*Pinus nigra* Arn.) plantation: a comparison of the Weibull frequency distribution function and percentilebased projection methods // *Eur. J. Forest Res.*, 2010, no. 129, pp. 1169–1179. DOI: 10.1007/s10342-010-0407-y
- [26] Gorgoso J.J., Rojo A., Camara-Obregon A., Dieguez-Aranda U. A comparison of estimation methods for fitting Weibull, Johnson's SB and beta functions to *Pinus pinaster*, *Pinus radiata* and *Pinus sylvestris* stands in northwest Spain // *Forest Systems*, 2012, no. 21(3), pp. 446–459. DOI: 10.5424/fs/2014233-04939
- [27] Ogana F.N., Osho J.S.A., Gorgoso-Varela J.J. Comparison of beta, Gamma and Weibull distributions for characterizing tree diameter in Oluwa Forest Reserve, Ondo State, Nigeria // *J. of Natural Sciences Research*, 2015, no. 5(4), pp. 28–36.
- [28] Ogana F.N., Itam E.S., Osho J.S.A. Modeling diameter distributions of Gmelina arborea plantation in Omo Forest Reserve, Nigeria with Johnson's SB // *J. of Sustainable Forestry*, 2016. DOI: 10.1080/10549811.2016.1263575
- [29] Wang J., Yan M., Huang Q., Huang R., Zheng Q. Diameter Distribution of Semi-natural Mixed Forest of *Pinus massoniana* and Broadleaved Trees Based on Stratification // *Forest Research*, 2021, no. 34(3), pp. 72–80. DOI: 10.13275/j.cnki.lykxyj.2021.03.008
- [30] Chen Y., Wu B., Min Z. Stand Diameter Distribution Modeling and Prediction Based on Maximum Entropy Principle // *Forests*, 2019, no. 10(10), id 859. DOI: 10.3390/f10100859
- [31] Schütz J.P., Rosset C. Performances of different methods of estimating the diameter distribution based on simple stand structure variables in monospecific regular temperate European forests // *Annals of Forest Science*, 2020, no. 77, id 47. DOI: 10.1007/s13595-020-00951-3
- [32] Borders B.E., Patterson W.D. Projecting stand tables: A comparison of the Weibull diameter distribution method, a percentile-based projection method, and a basal area growth projection method // *Forest Science*, 1990, no. 36, pp. 413–424.
- [33] Maltamo M., Puumalainen J., Päivinen R. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies* // *Scandinavian J. of Forest Research*, 1995, no. 10, pp. 284–295.
- [34] Sakici O.E., Gülsunar M. Diameter Distribution of Bornmullerian Fir in Mixed Stands // *Kastamonu Univ. J. of Forestry Faculty*, 2012, pp. 263–270.
- [35] Rudge M.L.M., Levick S.R., Bartolo R.E., Erskine P.D. Modelling the Diameter Distribution of Savanna Trees with Drone-Based LiDAR // *Remote Sensing*, 2021, no. 13, id. 1266. DOI: 10.3390/rs13071266
- [36] Hao Y., Widagdo F.R.A., Liu X., Quan Y., Liu Z., Dong L., Li F. Estimation and calibration of stem diameter distribution using UAV laser scanning data: A case study for larch (*Larix olgensis*) forests in Northeast China // *Remote Sensing of Environment*, 2022, no. 268, id. 112769. DOI: 10.1016/j.rse.2021.112769

## Сведения об авторе

**Лебедев Александр Вячеславович** — канд. с.-х. наук, доцент кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства, Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева, alebedev@rgau-msha.ru

Поступила в редакцию 17.12.2021.

Одобрено после рецензирования 01.02.2022.

Принята к публикации 04.04.2022.



## GENERALIZED MODEL OF PINE TREES DIAMETER DISTRIBUTION

**A.V. Lebedev**

Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy, 49, Timiryazevskaya st., 127550, Moscow, Russia

alebedev@rgau-msha.ru

A generalized statistical model for the distribution of tree diameters for pine forest plantations, developed on the basis of a three-parameter Weibull function, is presented. Its parameters were restored using data from 231 distribution series on 24 permanent sample plots in the Forest Experimental Station of the Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy from the first and second central moments of the distribution. It is shown that their estimates can be obtained from the equations of connection with the root-mean-square diameter of trunks in a forest stand. It was revealed that the developed model approximates with high accuracy the actual distributions of tree diameters in maturing, middle-aged and mature forest stands, and in young stands there may be deviations between the actual and predicted frequency values. It is shown that the main purpose of the developed model is to predict the distribution of diameters of tree trunks in future ages of forest stands to optimize the management of forest plantations.

**Keywords:** generalized model, diameter distribution, Weibull distribution, pine stand

**Suggested citation:** Lebedev A.V. *Obobshchennaya model' raspredeleniya diametrov derev'ev v sosnovykh drevostoyakh* [Generalized model of pine trees diameter distribution]. *Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin*, 2022, vol. 26, no. 4, pp. 53–62. DOI: 10.18698/2542-1468-2022-4-53-62

### References

- [1] Mehtätalo L. An algorithm for ensuring compatibility between estimated percentiles of diameter distribution and measured stand variables. *Forest Science*, 2004, no. 50(1), pp. 20–32. DOI: 10.1093/forestscience/50.1.20
- [2] Maltamo M., Mehtätalo L., Valbuena R., Vauhkonen J., Packalen P. Airborne laser scanning for tree diameter distribution modelling: a comparison of different modelling alternatives in a tropical single-species plantation. *Forestry*, 2018, no. 91(1), pp. 121–131. DOI: 10.1093/forestry/cpx041
- [3] Baile R.L., Dell T.R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science*, 1973, no. 19, pp. 97–104.
- [4] Hyink D.M., Moser J.W. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *Forest Science*, 1983, no. 29, pp. 85–95.
- [5] Lei X., Peng C., Wang H., Zhou X. Individual height-diameter models for young black spruce (*Picea mariana*) and jack pine (*Pinus banksiana*) plantations in New Brunswick, Canada. *Forest. Chron.*, 2009, no. 85, pp. 43–56. DOI: 10.5558/tfc85043-1
- [6] Ochał W., Pajak M., Pietrzykowski M. Diameter structure of selected pine stands growing on post-mining sites reclaimed for forestry. *Sylvan*, 2010, no. 154, pp. 323–332.
- [7] Ivanova N.S., Mazurkin P.M. *Raspredelenie derev'ev berezy na lesoseke po stupenyam tolshchiny i tovarnosti* [Distribution of birch trees in a felling area by steps of thickness and marketability]. *Lesnoy Zhurnal (Russian Forestry Journal)*, 2007, no. 6, pp. 58–63.
- [8] Chernykh V.L., Chernykh L.V., Chernykh D.V. *Unifitsirovannyi algoritm rascheta tovarnoy i sortimentnoy struktury zapasa drevostoev* [A Unified Algorithm to Calculate the Commodity and Assortment Structure of the Growing Stock]. *Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Ser.: Les. Ekologiya. Prirodopol'zovanie* [Vestnik of Volga State University of Technology. Ser.: Forest. Ecology. Nature Management], 2020, no. 2 (46), pp. 27–45. DOI: 10.25686/2306-2827.2020.2.27
- [9] Bliss C.I., Reinker K.A. A Lognormal Approach to Diameter Distributions in Even-Aged Stands. *Forest Science*, 1964, v. 10, iss. 3, pp. 350–360. DOI: 10.1093/forestscience/10.3.350
- [10] Maltamo M., Puumalainen J., Päivinen R. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. *Scandinavian J. of Forest Research*, 1995, no. 10, pp. 284–295.
- [11] Stavrova N.I., Gorshkov V.V., Katyunin P.N. *Dinamika raspredeleniya osobey v populyatsiyakh eli sibirskoy i berezy pushistoy po velichine diametra stvola v protsesse poslepozharnykh suktsessiy severotaezhnykh elovykh lesov* [Dynamics of the distribution of individuals in the populations of Siberian spruce and downy birch by the size of the trunk diameter in the process of post-fire successions of northern taiga spruce forests]. *Lesovedenie* [Forest Science], 2010, no. 3, pp. 21–31.
- [12] Ciceu A., Pitar D., Badea O. Modeling the Diameter Distribution of Mixed Uneven-Aged Stands in the South Western Carpathians in Romania. *Forests*, 2021, no. 12, id. 958. DOI: 10.3390/f12070958
- [13] Baile R.L., Dell T.R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science*, 1973, no. 19, pp. 97–104.
- [14] Fonseca T.F., Marques C.P., Parresol B.R. Describing Maritime Pine diameter distribution with Johnson's SB distribution using a new all-parameter recovery approach. *Forest Science*, 2009, no. 55, pp. 367–373.
- [15] Mateus A., Tomé M. Modelling the diameter distribution of eucalyptus plantations with Johnson's SB probability density function: Parameters recovery from a compatible system of equations to predict stand variables. *Ann. For. Sci.* 2011, no. 68, pp. 325–335.
- [16] Borders B.E., Souter R.A., Bailey R.L., Ware K.D. Percentile-based distributions characterize forest stand tables. *Forest Science*, 1987, no. 33, pp. 570–576.
- [17] Khlyustov V.K., Lebedev A.V. *Tovarno-denezhnyy potentsial drevostoev i optimizatsiya lesopol'zovaniya* [Commodity-money potential of forest stands and optimization of forest management]. Irkutsk: Megaprint, 2017, 328 p.

- [18] Pogoda P., Ochał W., Orzeł S. Modeling Diameter Distribution of Black Alder (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) Stands in Poland // Forests, 2019, no. 10, id 412. DOI: 10.3390/f10050412
- [19] Dubenok N.N., Kuz'michev V.V., Lebedev A.V. *Rezultaty eksperimental'nykh rabot za 150 let v Lesnoy opytной dache Timiryazevskoy sel'skokhozyaystvennoy akademii* [The results of experimental work for 150 years in the Lesnaya experimental dacha of the Timiryazev Academy]. Moscow: Nauka, 2020, 382 p.
- [20] Dubenok N.N., Kuz'michev V.V., Lebedev A.V. *Rost i produktivnost' drevostoev sosny i listvennitsy v usloviyakh gorodskoy sredy* [Growth and Productivity of Pine and Larch Stands under Conditions of Urban Environment]. Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya: Les. Ekologiya. Prirodopol'zovanie [Vestnik of Volga State University of Technology. Ser.: Forest. Ecology. Nature Management], 2018, no. 1(37), pp. 54–71. DOI 10.15350/2306-2827.2018.1.54
- [21] Naumov V.D., Povetkina N.L., Lebedev A.V., Gemonov A.V. *Geograficheskie kul'tury sosny v lesnoy opytной dache Timiryazevskoy akademii: k 180-letiyu M.K. Turskogo* [Geographical plantations of pine in the Forest Experimental Station of the Timiryazev Academy: to the 180th anniversary of M.K. Tursky]. Moskva: MESKh, 2019, 182 p.
- [22] Tretyakov V.A. *Dinamika raspredeleniya derev'ev po diametram v gushtykh kul'urakh sosny, eli i kedra* [Dynamics of the distribution of trees by diameter in dense plantations of pine, spruce and cedar]. Lesovedenie [Forest Science], 2005, no. 5, pp. 72–74.
- [23] Soares T.S., Leite H.G., Soares C.P.B., Vale A.B. Comparação de diferentes abordagens na modelagem da distribuição diamétrica. Floresta, 2010, № 40(4), pp. 731–738. DOI: 10.5380/rev.v40i4.20325
- [24] Miranda R., Fiorentin L., Netto S.P., Juvanhol R., Corte A.D. Prediction System for Diameter Distribution and Wood Production of Eucalyptus. Floresta Ambient, 2018, no. 25(3). DOI: 10.1590/2179-8087.054816
- [25] Stankova T.V., Zlatanov T.M. Modeling diameter distribution of Austrian black pine (*Pinus nigra* Arn.) plantation: a comparison of the Weibull frequency distribution function and percentilebased projection methods. Eur. J. Forest Res., 2010, no. 129, pp. 1169–1179. DOI: 10.1007/s10342-010-0407-y
- [26] Gorgoso J.J., Rojo A., Camara-Obregon A., Dieguez-Aranda U. A comparison of estimation methods for fitting Weibull, Johnson's SB and beta functions to *Pinus pinaster*, *Pinus radiata* and *Pinus sylvestris* stands in northwest Spain. Forest Systems, 2012, no. 21(3), pp. 446–459. DOI: 10.5424/fs/2014233-04939
- [27] Ogana F.N., Osho J.S.A., Gorgoso-Varela J.J. Comparison of beta, Gamma and Weibull distributions for characterizing tree diameter in Oluwa Forest Reserve, Ondo State, Nigeria. J. of Natural Sciences Research, 2015, no. 5(4), pp. 28–36.
- [28] Ogana F.N., Itam E.S., Osho J.S.A. Modeling diameter distributions of Gmelina arborea plantation in Omo Forest Reserve, Nigeria with Johnson's SB. J. of Sustainable Forestry, 2016. DOI: 10.1080/10549811.2016.1263575
- [29] Wang J., Yan M., Huang Q., Huang R., Zheng Q. Diameter Distribution of Semi-natural Mixed Forest of *Pinus massoniana* and Broadleaved Trees Based on Stratification. Forest Research, 2021, no. 34(3), pp. 72–80. DOI: 10.13275/j.cnki.lykxyj.2021.03.008
- [30] Chen Y., Wu B., Min Z. Stand Diameter Distribution Modeling and Prediction Based on Maximum Entropy Principle. Forests, 2019, no. 10(10), id 859. DOI: 10.3390/f10100859
- [31] Schütz J.P., Rosset C. Performances of different methods of estimating the diameter distribution based on simple stand structure variables in monospecific regular temperate European forests. Annals of Forest Science, 2020, no. 77, id 47. DOI: 10.1007/s13595-020-00951-3
- [32] Borders B.E., Patterson W.D. Projecting stand tables: A comparison of the Weibull diameter distribution method, a percentile-based projection method, and a basal area growth projection method. Forest Science, 1990, no. 36, pp. 413–424.
- [33] Maltamo M., Puumalainen J., Päivinen R. Comparison of beta and Weibull functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. Scandinavian J. of Forest Research, 1995, no. 10, pp. 284–295.
- [34] Sakici O.E., Gulsunar M. Diameter Distribution of Bornmullerian Fir in Mixed Stands. Kastamonu Univ. J. of Forestry Faculty, 2012, pp. 263–270.
- [35] Rudge M.L.M., Levick S.R., Bartolo R.E., Erskine P.D. Modelling the Diameter Distribution of Savanna Trees with Drone-Based LiDAR. Remote Sensing, 2021, no. 13, id. 1266. DOI: 10.3390/rs13071266
- [36] Hao Y., Widagdo F.R.A., Liu X., Quan Y., Liu Z., Dong L., Li F. Estimation and calibration of stem diameter distribution using UAV laser scanning data: A case study for larch (*Larix olgensis*) forests in Northeast China. Remote Sensing of Environment, 2022, no. 268, id. 112769. DOI: 10.1016/j.rse.2021.112769

## Author's information

**Lebedev Aleksandr Viacheslavovich** — Cand. Sci. (Agriculture), Associate Professor of the Department of Agricultural Meliorations, Forestry and Land Organization, Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy, alebedev@rgau-msha.ru

Received 17.12.2021.

Approved after review 01.02.2022.

Accepted for publication 04.04.2022.