Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2022. Т. 26. № 3. С. 125–130. ISSN 2542-1468
Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2022, vol. 26, no. 3, pp. 125–130. ISSN 2542-1468

УДК 512.643.8
DOI: 10.18698/2542-1468-2022-3-125-130
Шифр ВАК 2.3.1

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОЕКТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А.М. Ветошкин[1]✉, А.А. Шум[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1
[2]ТГТУ, 170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, д. 22

vetkin@mgul.ac.ru

Предлагается формула вычисления псевдообратной матрицы для блочной матрицы [A:B] в случае, когда подпространства строк матриц A и B пересекаются только по нулю ($\{A\}\cap\{B\} = 0$): $[A:B]^+ = \begin{bmatrix}(\tilde{B}A)^+\\(\tilde{A}B)^+\end{bmatrix}$.

Рассмотрены полезные примеры применения приведенной формулы. Получена формула Андерсона — Даффина для двух ортопроекторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ Установлено: $(\hat{A}+\hat{B}-\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^+ = pp^*p+qq^*q$, где $p=(\tilde{B}\hat{A})^+; q=(\tilde{A}\hat{B})^+$; псевдообратная матрица коммутатора $PP^* - P^*P$ равна сумме четырех проекторов. Найдена псевдообратная матрица от суммы двух проекторов.

Ключевые слова: проектор, ортопроектор, косой проектор, псевдообратная матрица, формула Клайна

Ссылка для цитирования: Ветошкин А.М., Шум А.А. Матричные представления проекторов и их приложения // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2022. Т. 26. № 3. С. 125–130. DOI: 10.18698/2542-1468-2022-3-125-130

Пусть $M_{n,k} = M_{n,k}(\mathbb{F})$ — множество прямоугольных матриц размера $n \times k$ с элементами из поля $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Если $n = k$, то вместо $M_{n,n}$ пишем M_n. Матрица $P \in M_n$ называется проектором, если $P^2 = P$. Если проектор P является эрмитовой матрицей, то P называется ортопроектором.

Подпространства L и M называются дополнительными, если они пересекаются по нулевому вектору, и $L + M = \mathbb{F}^n$. Обозначим матрицу, проектирующую на подпространство L вдоль подпространства M, через Pr(L, M). Для подпространства, натянутого на столбцы матрицы A (образа A), будем использовать такое обозначение: $\{A\}$. Если подпространства, определяющие проектор, задаются матрицами $L = \{A\}$ и $M = \{B\}$, то вместо Pr(L, M), или Pr($\{A\}$, $\{B\}$) пишем Pr(A, B).

Используем обозначение: $L^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L. Через M^+ в соответствии с работами [1–4] обозначаем псевдообратную матрицу к матрице M.

Для ортопроектора $\Pr(A) = \Pr(\{A\}, \{A\}^\perp)$, задаваемого матрицей A, используется также обозначение $\hat{A}$. Отметим, что $\hat{A} = AA^+$. *Дополнительный проектор* вводится соотношением $\tilde{A} = I_n - \hat{A}$, где I_n — единичная матрица порядка n.

В работе [5] получены следующие полезные результаты, имеющие отношение к двум матрицам A и B с одинаковым числом строк.

Теорема. *Пусть подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ являются дополнительными. Тогда проектор на подпространство $\{A\}$ вдоль подпространства $\{B\}$ дается выражением*

$$\Pr(A, B) = A(\tilde{B}A)^+. \quad (1)$$

Причем, если A столбцовая матрица полного ранга, то

$$\Pr(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}. \quad (2)$$

Если для матриц A и B потребовать только то, чтобы пересечение натянутых на них подпространств было нулевым ($\{A\}\cap\{B\}=0$), то выполняются равенства:

$$A(\tilde{B}A)^+ = (\tilde{B}\hat{A})^+ = \Pr(\{A\}, \{B\} + (\{A\} + \{B\})^\perp). \quad (3)$$

$$A(\tilde{B}A)^+ + B(\tilde{A}B)^+ = \Pr([A:B]). \quad (4)$$

В случае произвольных матриц A и B с одинаковым числом строк матричное выражение $(\tilde{B}A)^+$ является следующим проектором

$$(\tilde{B}\hat{A})^+ = \Pr(\{A\} \cap (\{A\} \cap \{B\})^\perp, \{B\} + (\{A\} + \{B\})^\perp). \quad (5)$$

Если $\{A\}\cap\{B\} = 0$, то

$$[A:B]^+ = \begin{bmatrix}(\tilde{B}A)^+\\(\tilde{A}B)^+\end{bmatrix}. \quad (6)$$

Запись [A:B] используется для обозначения *блочной* матрицы, полученной последовательным выписыванием столбцов матрицы A и столбцов матрицы B.

Следующая лемма [5] полезна при манипуляциях с выражениями вида $\hat{B}A$ или $\tilde{B}A$.

Лемма. *Пусть матрица A — столбцовая полного ранга, у матрицы B такое же число строк, как у матрицы A. Матрица $\hat{B}A$ — столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда*

$\{A\}\cap\{B\}^{\perp}=0$. *Матрица* $\tilde{B}A$ *— столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда* $\{A\}\cap\{B\}=0$.

Цель работы

Цель работы — проиллюстрировать полезность результатов (1) – (6) из работы [5] для вычисления псевдообратной матрицы для матриц, представленных различными многочленными выражениями от проекторов.

Постановка задачи

Нередко возникает необходимость вычислить или преобразовать псевдообратную матрицу для некоторого матричного выражения. И зачастую это представляет непростую задачу.

В качестве примера можно привести теорему Андерсона — Даффина [6]. В этой теореме рассматривается выражение $2P(P+Q)^{+}Q$ для двух ортопроекторов P и Q. Оказывается, это выражение задает ортопроектор на пересечение образов этих проекторов. В свое время этот результат произвел большое впечатление и был даже назван жемчужиной линейной алгебры.

Применение рекламируемых в данной работе методов к упомянутому выражению позволяет получить результат Андерсона — Даффина путем почти механических вычислений, может быть, и не очень коротких (см. ниже пример 1).

Средства и методы

Перечислим здесь важные свойства псевдообратной матрицы, а также некоторые другие факты [4, 7–15], на которые будет опираться дальнейшее изложение.

Если A имеет полный ранг по столбцам, то

$$A^{+}=(A^{*}A)^{-1}A^{*},\ A^{+}A=I. \quad (7)$$

Если A имеет полный ранг по строкам, то

$$A^{+}=A^{*}(AA^{*})^{-1},\ AA^{+}=I. \quad (8)$$

Пусть матрица A имеет скелетное разложение $A=XY$, где X — столбцовая матрица полного ранга, а Y — строчная матрица полного ранга, тогда

$$A^{+}=(XY)^{+}=Y^{+}X^{+}. \quad (9)$$

$$A^{+}B=0\Leftrightarrow A^{*}B=0. \quad (10)$$

Выполняются равенства

$$\tilde{A}\hat{A}=\hat{A}\tilde{A}=0,\quad \tilde{A}A=0,\quad A^{*}\tilde{A}=0. \quad (11)$$

Имеет место следствие из работы [1]:

Клайн — Следствие 1.4.

$$[A:B]^{+}=\begin{bmatrix}A^{+}\\ B^{+}\end{bmatrix} \quad (12)$$

тогда и только тогда, когда $\tilde{A}B=B$.

Условие $\tilde{A}B=B$ эквивалентно такому: $\hat{A}B=0$, или $\{B\}\subset\ker\hat{A}=\{A\}^{\perp}$, или $A^{*}B=0$.

Примеры вычисления псевдообратных матриц

Приведем несколько примеров вычисления псевдообратной матрицы для матриц, представленных различными многочленными выражениями от проекторов.

Пример 1

Вычислим псевдообратную матрицу для суммы двух ортопроекторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Для этого воспользуемся разложением подпространств $\{A\}$ и $\{B\}$ в прямые суммы подпространств так, как это сделано в работе [5]. Рассмотрим следующие подпространства: $\mathcal{A}=\{\mathrm{A}\}$, $\mathcal{B}=\{\mathrm{B}\}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, $\mathcal{X}=\mathcal{A}\cap\mathcal{Y}^{\perp}$ и $\mathcal{Z}=\mathcal{B}\cap\mathcal{Y}^{\perp}$ так, что $\mathcal{A}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}$ и $\mathcal{B}=\mathcal{Z}\oplus\mathcal{Y}$. Пусть матрицы X, Y, Z составлены из базисных векторов подпространств $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ соответственно и столбцы матриц X, Y, Z образуют ортонормированные системы векторов. В результате получаем, что $\hat{A}=\hat{X}+\hat{Y}$ и $\hat{B}=\hat{Z}+\hat{Y}$.

Поскольку столбцы матриц X, Y, Z линейно независимы, можно воспользоваться свойством (9)

$$(\hat{A}+\hat{B})^{+}=(\hat{X}+\hat{Z}+2\hat{Y})^{+}=(XX^{*}+ZZ^{*}+2YY^{*})^{+}=$$

$$=(\begin{bmatrix}X:Z:2Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X^{*}\\ Z^{*}\\ Y^{*}\end{bmatrix})^{+}=\begin{bmatrix}X^{*}\\ Z^{*}\\ Y^{*}\end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix}X:Z:2Y\end{bmatrix}^{+}=$$

$$=\begin{bmatrix}X:Z:Y\end{bmatrix}^{+*}\begin{bmatrix}X:Z:2Y\end{bmatrix}^{+}.$$

Из выражений (12) и (6) получаем

$$\begin{bmatrix}X:Z:Y\end{bmatrix}^{+}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}X:Z\end{bmatrix}^{+}\\ Y^{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\tilde{Z}X)^{+}\\ (\tilde{X}Z)^{+}\\ Y^{+}\end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$(\hat{A}+\hat{B})^{+}=\begin{bmatrix}(\tilde{Z}X)^{+*}:(\tilde{X}Z)^{+*}:Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\tilde{Z}X)^{+}\\ (\tilde{X}Z)^{+}\\ \tfrac{1}{2}Y^{*}\end{bmatrix}=$$

$$=(X^{*}\tilde{Z})^{+}(\tilde{Z}X)^{+}+(Z^{*}\tilde{X})^{+}(\tilde{X}Z)^{+}+\tfrac{1}{2}\hat{Y}=$$

$$=(X^{*}\tilde{Z})^{+}X^{*}X(\tilde{Z}X)^{+}+(Z^{*}\tilde{X})^{+}Z^{*}Z(\tilde{X}Z)^{+}+\tfrac{1}{2}\hat{Y}=$$

$$=p^{*}p+q^{*}q+\tfrac{1}{2}\hat{Y},$$

где p и q два проектора:

$$\begin{aligned}p&=X(\tilde{Z}X)^{+}=X(X^{*}\tilde{Z}X)^{-1}X^{*}\tilde{Z}=(\tilde{B}\hat{A})^{+};\\ q&=Z(\tilde{X}Z)^{+}=Z(Z^{*}\tilde{X}Z)^{-1}Z^{*}\tilde{X}=(\tilde{A}\hat{B})^{+},\end{aligned} \quad (13)$$

Причем, исходя из выражения (4) имеем

$$p + q = P(\{X\} + \{Z\}). \tag{14}$$

Таким образом,

$$(\hat{A} + \hat{B})^+ = p^* p + q^* q + \tfrac{1}{2}\hat{Y}. \tag{15}$$

Кроме того,

$$(\hat{X} + \hat{Z})^+ = p^* p + q^* q. \tag{16}$$

Составим следующую таблицу произведений проекторов:

	$\hat{X}$	$\hat{Y}$	$\hat{Z}$	p	q	p^*	q^*
$\hat{X}$	$\hat{X}$	0	$\hat{X}\hat{Z}$	p	$\hat{X}q$	$\hat{X}$	0
$\hat{Y}$	0	$\hat{Y}$	0	0	0	0	0
$\hat{Z}$	$\hat{Z}\hat{X}$	0	$\hat{Z}$	$\hat{Z}p$	q	0	$\hat{Z}$
p	$\hat{X}$	0	0	p	0	pp^*	pq^*
q	0	0	$\hat{Z}$	0	q	qp^*	qq^*
p^*	p^*	0	$p^*\hat{Z}$	p^*p	pq^*	p^*	0
q^*	$q^*\hat{Z}$	0	q^*	q^*p	q^*q	0	q^*

Используя (15) и эту таблицу, получим формулу Андерсона — Даффина [16–17]:

$$2\hat{A}(\hat{A} + \hat{B})^+ \hat{B} = \hat{Y}. \tag{17}$$

Аналогичным образом вычисляется выражение

$$(\hat{A} - \hat{B})^+ = p^* p - q^* q. \tag{18}$$

Получаем равенства:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{A}(\hat{A} - \hat{B})^+ \hat{A}, \\ \hat{Z} &= \hat{B}(\hat{B} - \hat{A})^+ \hat{B}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} p &= \hat{A}(\hat{A} - \hat{B})^+, \\ q &= \hat{B}(\hat{B} - \hat{A})^+, \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} \hat{X} &= p(p^* p + q^* q)^+ p^*, \\ \hat{Z} &= q(p^* p + q^* q)^+ q^*. \end{aligned} \tag{21}$$

Отметим, что формулы (19) – (21) являются аналогами и обобщениями формул (5.3) – (5.6) из работы [18], в которой рассматривается случай, когда образы ортопроекторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ дополнительны.

Пример 2

Вычислим C^+, где $C = \hat{A} + \hat{B} - \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Применив те же представления ортопроекторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, что и в примере 1, получаем:

$$C = \hat{X} + \hat{Z} - \hat{X}\hat{Z} - \hat{Z}\hat{X} =$$
$$= XX^* + ZZ^* - XX^*ZZ^* - ZZ^*XX^* =$$
$$= \left[X : Z\right] \begin{bmatrix} I & -X^*Z \\ -Z^*X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^* \\ Z^* \end{bmatrix}.$$

Выполняется следующее тождество для блочной матрицы

$$\begin{bmatrix} I & a \\ b & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -a \\ -b & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I - ab)^{-1} & 0 \\ 0 & (I - ba)^{-1} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае $(I - ab)^{-1} = (X^*X - X^*\hat{Z}X)^{-1} = (X^*\tilde{Z}X)^{-1} = \alpha$ и $(I - ba)^{-1} = (Z^*\tilde{X}Z)^{-1} = \beta$ — по лемме нужные обратные матрицы существуют.

$$C^+ = \left[X : Z\right]^{+*} \begin{bmatrix} X^*X & X^*Z \\ Z^*X & Z^*Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \left[X : Z\right]^+ =$$
$$= \left[(X^*\tilde{Z})^+ : (Z^*\tilde{X})^+\right] \begin{bmatrix} X^* \\ Z^* \end{bmatrix} \left[X : Z\right] \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^*X & 0 \\ 0 & Z^*Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tilde{Z}X)^+ \\ (\tilde{X}Z)^+ \end{bmatrix} =$$
$$= (p^* + q^*)\left[X\alpha : Z\beta\right] \begin{bmatrix} X^* \cdot X(\tilde{Z}X)^+ \\ Z^* \cdot Z(\tilde{X}Z)^+ \end{bmatrix} = (p^* + q^*)(X\alpha X^* p + Z\beta Z^* q).$$

Поскольку $p^* + q^* = p + q$ и $pp^* = X\alpha X^*$, $qq^* = Z\beta Z^*$, то, учитывая данные таблицы, получаем

$$(\hat{A} + \hat{B} - \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^+ = pp^* p + qq^* q. \tag{22}$$

Пример 3

Рассмотрим коммутатор произвольного проектора P и сопряженного ему: $K = PP^* - P^*P$. Произвольный проектор P [19] можно единственным образом представить в виде суммы ортопроектора r и строго косого проектора s: $P = r + s$. (Строго косой проектор — это проектор, у которого образ и ортогональное дополнение к ядру пересекаются только по нулю [19]). После несложных вычислений получаем $K = ss^* - s^*s$. Как видно из этого равенства, данный коммутатор определяется только строго косой частью проектора P.

Вычисляем выражение K^+. Для этого рассмотрим представление проектора s вида (2): $s = x(x^*\tilde{y}x)^{-1}x^*\tilde{y}$, где матрицы x и y задают соответственно образ и ядро проектора s. Удобно выбрать столбцы матриц x и y ортонормированными, так что $x^*x = I$, $y^*y = I$. Определим следующие матрицы: $\alpha = x^*\tilde{y}x$, $\beta = x^*\hat{y}x$. Для них выполняются следующие соотношения — $\alpha + \beta = I$, $\alpha\beta = \beta\alpha$. Матрицы α и β являются невырожденными, как матрицы Грама линейно независимых систем векторов, задаваемых столбцами матриц $\tilde{y}x$ и $\hat{y}x$.

$$K = x\alpha^{-1}x^*\tilde{y}\cdot\tilde{y}x\alpha^{-1}x^* - \tilde{y}x\alpha^{-1}x^*\cdot x\alpha^{-1}x^*\tilde{y} =$$
$$= x\alpha^{-1}x^* - \tilde{y}x\alpha^{-2}x^*\tilde{y} =$$
$$= \left[x:\tilde{y}x\right]\begin{bmatrix}\alpha^{-1} & 0\\ 0 & -\alpha^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^*\\ x^*\tilde{y}\end{bmatrix}.$$

Так как $(\ker s)^{\perp} = \{y\}^{\perp} = \{\tilde{y}x\}$, то в силу того, что матрица s строго косая, выполняется условие: $\{\tilde{y}x\}\cap\{x\} = 0$. Это означает, что столбцы матрицы $\left[x:\tilde{y}x\right]$ линейно независимы, а потому можно к факторизации K применить свойство (9):

$$K^+ = \left[x:\tilde{y}x\right]^{+*}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha^2\end{bmatrix}\left[x:\tilde{y}x\right]^+.$$

По формуле (6) получаем:

$$\left[x:\tilde{y}x\right]^+ = \begin{bmatrix}(\tilde{z}x)^+\\ (\tilde{x}\tilde{y}x)^+\end{bmatrix},\ z = \tilde{y}x.$$

Поскольку $\{\tilde{y}x\} = \{y\}^{\perp}$, то дополнительным проектором к ортопроектору на подпространство $\{y\}^{\perp}$ будет $\hat{y}$. В силу леммы $\tilde{x}\cdot\tilde{y}x$ есть столбцовая матрица полного ранга тогда и только тогда, когда $\{x\}\cap\{\tilde{y}x\} = 0$, а последнее следует из того, что s строго косая матрица. Таким образом, учитывая выражение (7), получаем:

$$\left[x:\tilde{y}x\right]^+ = \begin{bmatrix}(\hat{y}x)^+\\ (\tilde{x}\tilde{y}x)^+\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(x^*\hat{y}x)^{-1}x^*\hat{y}\\ (x^*\tilde{y}\tilde{x}\tilde{y}x)^{-1}x^*\tilde{y}\tilde{x}\end{bmatrix}.$$

Так как $x^*\tilde{y}\tilde{x}\tilde{y}x = -x^*\tilde{y}\tilde{x}\hat{y}x = x^*\tilde{y}\hat{x}\hat{y}x = \alpha\beta$, то

$$\left[x:\tilde{y}x\right]^+ = \begin{bmatrix}\beta^{-1}x^*\hat{y}\\ \alpha^{-1}\beta^{-1}x^*\tilde{y}\tilde{x}\end{bmatrix}.$$

Далее получаем:

$$K^+ = \left[\hat{y}x\beta^{-1} : \tilde{x}\tilde{y}x\beta^{-1}\alpha^{-1}\right]\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta^{-1}x^*\hat{y}\\ \alpha^{-1}\beta^{-1}x^*\tilde{y}\tilde{x}\end{bmatrix} =$$
$$= \hat{y}x\beta^{-1}\alpha\beta^{-1}x^*\hat{y} - \tilde{x}\tilde{y}x\beta^{-2}x^*\tilde{y}\tilde{x}.$$

В последнем выражении преобразуем два подвыражения:

$$\beta^{-1}\alpha\beta^{-1} = \beta^{-1}(1-\beta)\beta^{-1} = \beta^{-2} - \beta^{-1},$$
$$\tilde{x}\tilde{y}x\beta^{-1} = -\tilde{x}\hat{y}x\beta^{-1} = (\hat{x} - I)\hat{y}x\beta^{-1} = x - \hat{y}x\beta^{-1}.$$

Далее:

$$K^+ = \hat{y}x(\beta^{-2} - \beta^{-1})x^*\hat{y} - (x - \hat{y}x\beta^{-1})(x^* - \beta^{-1}x^*\hat{y}) =$$
$$= x\beta^{-1}x^*\hat{y} + \hat{y}x\beta^{-1}x^* - \hat{x} - \hat{y}x\beta^{-1}x^*\hat{y}.$$

$$K^+ = t + t^* - \hat{x} - \hat{w},\ w = \hat{y}x. \tag{23}$$

Здесь $t = x(x^*\hat{y}x)^{-1}x^*\hat{y}$ — косой проектор, связанный с косым проектором s. Отметим, что ортопроектор $\hat{w} = \hat{y}x(x^*\hat{y}x)^{-1}x^*\hat{y}$, вообще говоря, не равен ортопроектору $\hat{y}$.

Пример 4

Вычисляем псевдообратную для суммы двух проекторов. Попытаемся найти такие проекторы, для которых удастся провести вычисления в духе первых трем примеров.

Пусть A, B, C, D такие столбцовые матрицы полного ранга, что $\{A\}$, $\{B\}$ и $\{C\}$, $\{D\}$ — пары дополнительных подпространств.

Имеем

$$\Pr(A,B) + a\Pr(C,D) =$$
$$= \left[A:C\right]\begin{bmatrix}(A^*\tilde{B}A)^{-1} & 0\\ 0 & a(C^*\tilde{D}C)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^*\tilde{B}\\ C^*\tilde{D}\end{bmatrix},$$

где $a \neq 0$.

Можно вычислить псевдообратную матрицу суммы $P(A,B) + aP(C,D)$ если будут выполняться условия:

$$\{A\}\cap\{C\} = 0,\ \{\tilde{B}A\}\cap\{\tilde{D}C\} = 0.$$

Поскольку $\{B\}^{\perp} = \{\tilde{B}A\}$ и $\{D\}^{\perp} = \{\tilde{D}C\}$, условие $\{\tilde{B}A\}\cap\{\tilde{D}C\} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$(\{\tilde{B}A\}\cap\{\tilde{D}C\})^{\perp} = (\{B\}^{\perp}\cap\{D\}^{\perp})^{\perp} =$$
$$= \{B\} + \{D\} = \mathbb{C}^n.$$

Сумма подпространств $\{B\}$ и $\{D\}$ здесь не обязательно должна быть прямой. Далее

$$(\Pr(A,B) + a\Pr(C,D))^+ =$$
$$= \left[\tilde{B}A:\tilde{D}C\right]^{+*}\begin{bmatrix}(A^*\tilde{B}A) & 0\\ 0 & a^{-1}(C^*\tilde{D}C)\end{bmatrix}\left[A:C\right]^+.$$

Так как

$$\left[A:C\right]^+ = \begin{bmatrix}(\tilde{C}A)^+\\ (\tilde{A}C)^+\end{bmatrix},$$

$$\left[\tilde{B}A:\tilde{D}C\right]^+ = \begin{bmatrix}(\tilde{U}\tilde{B}A)^+\\ (\tilde{V}\tilde{D}C)^+\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\hat{D}\tilde{B}A)^+\\ (\hat{B}\tilde{D}C)^+\end{bmatrix},$$

$$U = \tilde{D}C,\ V = \tilde{B}A,$$

то

$$(\Pr(A,B) + a\Pr(C,D))^+ =$$
$$= (A^*\tilde{B}\hat{D})^+A^*\tilde{B}A(\tilde{C}A)^+ + a^{-1}(C^*\tilde{D}\hat{B})^+C^*\tilde{D}C(\tilde{A}C)^+ =$$
$$= (A^*\tilde{B}\hat{D})^+A^*\tilde{B}(\tilde{C}\hat{A})^+ + a^{-1}(C^*\tilde{D}\hat{B})^+C^*\tilde{D}(\tilde{A}\hat{C})^+.$$

Рассмотрим выражение $\tilde{B}A(\hat{D}\tilde{B}A)^+$. Поскольку $\{B\}^{\perp}\cap\{D\}^{\perp} = 0$, то выражение $\hat{D}\tilde{B}A$ по лемме будет столбцовой матрицей полного ранга, как и матрица $\tilde{B}A$.

Поэтому $\tilde{B}A(\hat{D}\tilde{B}A)^+ = (\hat{D}\tilde{B}A(\tilde{B}A)^+)^+ = (\hat{D}\tilde{B})^+$.

Таким образом, можно сформулировать нижеследующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* A, B, C, D *такие столбцовые матрицы полного ранга, что* $\{A\}$, $\{B\}$ *и* $\{C\}$, $\{D\}$ *— пары дополнительных подпространств, кроме того, подпространства* $\{A\}$ *и* $\{C\}$ *пересекаются лишь по нулевому вектору, а подпространства* $\{B\}$ *и* $\{D\}$ *дают в сумме все пространство, тогда*

$$(\Pr(A,B) + a\Pr(C,D))^{+} = \\ = (\tilde{B}\hat{D})^{+}(\tilde{C}\hat{A})^{+} + a^{-1}(\tilde{D}\hat{B})^{+}(\tilde{A}\hat{C})^{+}. \quad (24)$$

Если, кроме того, подпространства $\{B\}$ *и* $\{D\}$ *дополнительны, то*

$$(\Pr(A,B) + a\Pr(C,D))^{+} = \\ = (\Pr(A,B) + a\Pr(C,D))^{-1} = \quad (25) \\ = \Pr(D,B)\Pr(A,C) + a^{-1}\Pr(B,D)\Pr(C,A).$$

Укажем частный случай формулы (25), когда подпространства $\{B\}$ и $\{C\}$ совпадают:

$$(\Pr(A,B) + a\Pr(B,D))^{-1} = \\ = \Pr(D,B)\Pr(A,B) + a^{-1}\Pr(B,D)\Pr(B,A) = \quad (26) \\ = \Pr(D,B) + a^{-1}\Pr(B,A).$$

Здесь использован такой факт о проекторах: произведение проекторов на одно подпространство определяется последним сомножителем, а произведение проекторов вдоль одного подпространства определяется первым сомножителем.

Формула (25) для вычитания ($a = -1$) приобретает особенно простой вид:

$$(\Pr(A,B) - \Pr(C,D))^{-1} = \Pr(A,C) - \Pr(B,D). \quad (27)$$

Формула (27) получена в работе [20]. Есть в этой работе и формула, эквивалентная формуле (25) при $a = 1$.

Обратим внимание на тот факт, что в формуле (24) четыре раза встречается псевдообратная от произведения двух ортопроекторов — такое выражение всегда является проектором и может быть задано формулой (5).

Выводы

Формулы (1) – (6), включая лемму, составляют технический аппарат, позволяющий проводить вычисления для различных выражений с матрицами, содержащими вычисления псевдообратных матриц. Формула (6) должна войти в активный арсенал исследователей в линейной алгебре и в численных методах.

Список литературы

[1] Cline R.E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix // J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, p. 588–600.
[2] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY:Wiley, 1996, 304 p.
[3] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Prince-ton University Press, 2009, 1101 p.
[4] Воеводин В.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 544 с.
[5] Ветошкин А.М. Произведение проекторов. Случай вложенных подпространств // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2018. Т. 25. № 3. С. 235–236.
[6] Anderson W.N.Jr., Duffin R.J. Series and parallel addition of matrices // J. Math. Anal. Appl., 1969, v. 26, pp. 576–594.
[7] Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
[8] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2008. 496 с.
[9] Ветошкин А.М. Компактная форма формулы Клайна // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014. Т. 21. Вып. 4. С. 337–338.
[10] Ветошкин А.М. Следствия из формулы Клайна // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2015. Т. 22. Вып. 4. С. 446–447.
[11] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Pub., 1979, 272 p.
[12] Cvetković Ilić D. S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Singapore: Springer, 2017, 194 p.
[13] Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. Springer, 2011, 234 p.
[14] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. NY&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.
[15] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.
[16] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.
[17] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, 2000, 718 p.
[18] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991. 400 с.
[19] Ветошкин А.М., Шум А.А. Строго косые проекторы и их свойства // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2020. Т. 24. № 5. С. 122–127. DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-122-127
[20] Koliha J.J., Rakocevic V., Straskraba I. The difference and sum of projectors // Linear Algebra and its Applications, 2004, v. 388, p. 279–288.

Сведения об авторах

Ветошкин Александр Михайлович✉ — канд. техн. наук, доцент МГТУ им Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), vetkin@mgul.ac.ru

Шум Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ТГТУ, shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 17.01.2022.

Одобрено после рецензирования 25.01.2022.

Принята к публикации 04.04.2022.

MATRIX REPRESENTATIONS OF PROJECTORS AND THEIR APPLICATIONS

A.M. Vetoshkin[1]✉, A.A. Shum[2]

[1]BMSTU (Mytishchi branch), 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg. Russia
[2]Tver State Technical University named after Afanasy Nikitin, 22, Tver, 170026, Russia

vetkin@mgul.ac.ru

The paper proposes a formula for calculating the pseudoinverse matrix for the block matrix [A:B] in the case when the subspaces of the rows of the matrices A and B intersect only at zero ($\{A\}\cap\{B\} = 0$): $[A:B]^+ = \begin{bmatrix} (\tilde{B}A)^+ \\ (\tilde{A}B)^+ \end{bmatrix}$ In this paper, useful examples of the application of the above formula are considered. The Anderson — Duffin formula is obtained; for two orthoprojectors $\hat{A}$ and $\hat{B}$. It is established $(\hat{A}+\hat{B}-\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})^+ = pp^*p+qq^*q$, where $p=(\tilde{B}\hat{A})^+; q=(\tilde{A}\hat{B})^+$. It is established that the pseudoinverse matrix of the commutator $PP^* - P^*P$ is equal to the sum of four projectors. The pseudoinverse matrix of the sum of two projectors is found.

Keywords: projector, orthoprojector, oblique projector, generalized inverse matrix, Cline's formula

Suggested citation: Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Matrichnye predstavleniya proektorov i ikh prilozheniya* [Matrix representations of projectors and their applications]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2022, vol. 26, no. 3, pp. 125–130. DOI: 10.18698/2542-1468-2022-3-125-130

References

[1] Cline R.E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, p. 588–600.
[2] Lütkepohl H. Handbook of matrices. NY:Wiley, 1996, 304 p.
[3] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Prince-ton University Press, 2009, 1101 p.
[4] Voevodin V.V. *Entsiklopediya lineynoy algebry. Elektronnaya sistema LINEAL* [Encyclopedia of linear algebra. Electronic system LINEAL]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg, 2006, 544 p.
[5] Vetoshkin A.M. *Frobeniusovy jendomorfizmy mnozhestva proektorov* [Frobenius endomorphisms of set of projectors]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2012, no. 6(89), pp. 116–122.
[6] Anderson W.N.Jr., Duffin R.J. Series and parallel addition of matrices. J. Math. Anal. Appl., 1969, v. 26, pp. 576–594.
[7] Magnus J.R., Neudecker H. *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike* [Matrix differential calculus. With applications in statistics and econometrics]. Moscow: Fizmatlit, 2002, 496 p.
[8] Beklemishev D.V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebry* [Additional chapters of linear algebra]. Saint Petersburg: Lan', 2008, 496 p.
[9] Vetoshkin A.M. *Kompaktnaya forma formuly Klayna* [Compact form of the Cline formula]. Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review app. and industrial Math.], 2014, t. 21, v. 4, pp. 337–338.
[10] Vetoshkin A.M. *Sledstviya iz formuly Klayna* [Consequences from Clin's formula] Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review app. and industrial Math.], 2015, t. 22, v. 4, pp. 446–447.
[11] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Pub., 1979, 272 p.
[12] Cvetković Ilić D.S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Singapore: Springer, 2017, 194 p.
[13] Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. Springer, 2011, 234 p.
[14] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. NY&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.
[15] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.
[16] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.
[17] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, 2000, 718 p.
[18] Malyshev A.N. *Vvedenie v vychislitel'nuyu lineynuyu algebru* [Introduction to Computational Linear Algebra]. Novosibirsk: Nauka, 1991, 400 p.
[19] Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Strogo kosye proektory i ikh svoystva* [Strictly oblique projectors and their properties]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2020, vol. 24, no. 5, pp. 122–127. DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-122-127.
[20] Koliha J.J., Rakocevic V., Straskraba I. The difference and sum of projectors // Linear Algebra and its Applications, 2004, v. 388, p. 279–288.

Authors' information

Vetoshkin Aleksandr Mikhaylovich✉ — Cand. Sci. (Tech), Associate Professor of the BMSTU (Mytishchi branch), vetkin@mgul.ac.ru

Shum Aleksandr Anatol'evich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 17.01.2022.
Approved after review 25.01.2022.
Accepted for publication 04.04.2022.

Вклад авторов: все авторы в равной доле участвовали в написании статьи
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Authors' Contribution: All authors contributed equally to the writing of the article
The authors declare that there is no conflict of interest