ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2020. Т. 24. № 5. С. 122–127. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

УДК 512.643.8 DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-122-127

СТРОГО КОСЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

А.М. Ветошкин[1], А.А. Шум[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1
[2]Тверской государственный технический университет, 170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, д. 22

vetkin@mgul.ac.ru

Определены строго косые проекторы как проекторы, которые нельзя представить в виде суммы двух проекторов, один из которых является ненулевым ортопроектором. Доказана теорема о единственном способе представления каждого проектора в виде суммы строго косого проектора и ортопроектора. Приведены свойства таких проекторов, в частности, если проектор строго косой, то и сопряженный ему также строго косой; ранг строго косого проектора не больше $n/2$, где n — порядок матрицы проектора; свойство проектора быть строго косым сохраняется при унитарном подобии. Работа является продолжением предыдущей работы авторов, основным результатом которой было составление матричного выражения для произвольного проектора: $P(A, B) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}$, где A и B две матрицы полного ранга, столбцы которых задают образ и ядро этого проектора. На основе этого результата установлено, что строго косую часть всякого проектора P описывает выражение $P(P - P^+P)^+P$. Показано, что равенство $P = P(P - P^+P)^+P$ подтверждает то, что проектор P есть строго косой проектор. Рекомендуется разложение проектора, полученное в работе, применять к практической задаче косоугольного проектирования на плоскость.

Ключевые слова: проектор, ортопроектор, косой проектор, строго косой проектор, псевдообратная матрица

Ссылка для цитирования: Ветошкин А.М., Шум А.А. Строго косые проекторы и их свойства // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2020. Т. 24. № 5. С. 122–127. DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-122-127

Проекторы подразделяют на два больших класса: 1) ортопроекторы, задаваемые эрмитовой матрицей; 2) косые проекторы. Косой проектор во многих случаях можно представить в виде суммы ортопроектора и другого проектора, в котором нет эрмитовой составляющей. Последние проекторы названы строго косыми.

Цель работы

Цель работы — исследование свойств строго косых проекторов с помощью средств, представленных в работе [1].

Постановка задачи

Пусть P — квадратная матрица с комплексными элементами, называемая *проектором* при $P = P^2$. Если P — эрмитова матрица, то P называют *ортопроектором*, иначе — *косым проектором*. Назовем проектор *строго косым*, если его нельзя представить в виде суммы двух проекторов, один из которых является ненулевым ортопроектором. Строго косые проекторы упоминаются в работе [2].

Материалы и методы

Воспользуемся некоторыми обозначениями из работы [1]. Пусть L и M — дополнительные подпространства. Матрица, проектирующая на L вдоль M, обозначается через $P(L, M)$. Для подпространства, натянутого на столбцы матрицы A (образа A), используется обозначение $\{A\}$. Если подпространства, определяющие проектор, задаются матрицами $L = \{A\}$ и $M = \{B\}$, то вместо $P(L, M)$ или $P(\{A\},\{B\})$ используется запись $P(A, B)$. M^+ обозначает псевдообратную матрицу к матрице M. Для ортопроектора $P(A) = P(\{A\}, \{A\}^\perp)$, задаваемого матрицей A, используется обозначение $\hat{A} = AA^+$. «Дополнительный» проектор $\tilde{A} = I_n - \hat{A}$.

Приведем известные факты [3–21], на которые будем ссылаться.

Если A имеет полный ранг по столбцам, то

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^*, \ A^+A = I. \tag{1}$$

Если A имеет полный ранг по строкам, то

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}, \ AA^+ = I. \tag{2}$$

Пусть матрица A имеет скелетное разложение $A = XY$, где X — столбцовая матрица полного ранга, а Y — строчная матрица полного ранга, тогда

$$A^+ = (XY)^+ = Y^+X^+. \tag{3}$$

Пусть подпространства A, B, C попарно пересекаются только по нулю и их сумма есть все пространство, тогда

$$P(A + B, C) = P(A, B + C) + P(B, A + C). \tag{4}$$

Для обоснования выражения (4) возьмем произвольный вектор x . Его можно представить в виде $x = a + b + c$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Подействовав правой и левой частью выражения (4) на этот вектор, получаем тождество $a + b = a + b$, что и доказывает формулу (4). Еще отметим, что проекторы в правой части выражения (4) перестановочные и в произведении дают ноль.

Из выражения (4) следует, что для ортогональных подпространств U и V можно записать:

$$P(U \oplus V) = P(U) + P(V). \quad (5)$$

(Или, если для матриц X и Y выполняется $X^*Y = 0$, то $\widehat{[X:Y]} = \hat{X} + \hat{Y}$. Для двух матриц X и Y с одинаковым числом строк матрица $[X{:}Y]$ — это блочная матрица).

Следующие выражения являются проекторами:

$$I - P(A, B) = P(B, A); \quad (6)$$

$$P^*(A, B) = P(\{B\}^{\perp}, \{A\}^{\perp}). \quad (7)$$

Приведем важную лемму из работы [1]:

Лемма. *Пусть A — столбцовая матрица полного ранга; у матрицы B такое же число строк, как и у матрицы A. Матрица $\hat{B}A$ — столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда $\{A\}\cap\{B\}^{\perp} = 0$. Матрица $\tilde{B}A$ — столбцовая полного ранга тогда и только тогда, когда $\{A\}\cap\{B\} = 0$.*

Строго косые проекторы

При рассмотрении проектора $P(A, B)$ часто возникают подпространства

$$A \cap B^{\perp} \text{ и } A^{\perp} \cap B.$$

Назовем их соответственно *первым и вторым подпространствами, связанными с проектором* $P(A, B)$.

У ортопроектора первое подпространство совпадает с образом, второе — с ядром. У произвольного проектора P и у сопряженного ему проектора P^* как первые, так и вторые подпространства совпадают, что следует из равенства (7).

Пусть A и B — произвольные дополнительные подпространства, так что $P(A, B)$ является проектором. Рассмотрим следующие подпространства: $C = A \cap B^{\perp}$ и $D = C^{\perp} \cap A$ так, что $A = C \oplus D$. Подпространство C в силу построения ортогонально подпространствам B и D, а также их сумме $B + D$. Используя формулу (4), проектор $P(A, B)$ можно представить в виде суммы проекторов на подпространства C и D:

$$P = P(A, B) = P(C + D, B) =$$
$$= P(C, B + D) + P(D, B + C).$$

Для произвольного проектора получили

$$P = P(C) + P(D, B + C). \quad (8)$$

У второго проектора $P(D, B + C)$ первое подпространство нулевое. Действительно:

$$(B + C)^{\perp} \cap D = (B^{\perp} \cap C^{\perp}) \cap D =$$
$$= B^{\perp} \cap (C^{\perp} \cap D) = B^{\perp} \cap D = 0.$$

Мы видим, что первое подпространство проектора P определяется ортопроектором в представлении (8).

Определение. *Будем называть проектор строго косым проектором, если пересечение его образа с ортогональным дополнением к его ядру состоит только из нулевого вектора.*

У строго косого проектора первое подпространство нулевое.

Таким образом, в уравнении (8) получено представление произвольного проектора в виде суммы ортопроектора и строго косого. Отметим, что нулевой проектор является как строго косым, так и ортопроектором. Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Произвольный проектор единственным способом представляется в виде суммы ортопроектора и строго косого проектора.*

Представление произвольного проектора в виде такой суммы получено в уравнении (8). Чтобы доказать единственность, предположим, что существует пара непересекающихся подпространств C_1 и D_1, отличных от пары C и D, таких, что $A = C_1 + D_1$ и в сумме $P(C_1 + D_1, B) = P(C_1, B + D_1) + P(D_1, B + C_1)$, первый проектор — ортопроектор, второй — строго косой. Из того, что $P(C_1, B + D_1)$ — ортопроектор, следует, что подпространство C_1 ортогонально как подпространству D_1, так и подпространству B. Из последнего следует, что $C_1 \subset C$. Поскольку C_1 и C не совпадают, то в C найдется ненулевой вектор c ортогональный подпространству C_1 и следовательно принадлежащий подпространству D_1. Отметим, что вектор c принадлежит подпространству $(B + C_1)^{\perp} \cap D_1$, поэтому проектор $P(D_1, B + C_1)$ не является строго косым. Получено противоречие. Единственность доказана.

В работе [4] Д.З. Дьековичем предложена теорема о канонической форме проектора относительно унитарного подобия. Для каждого проектора P существует унитарное подобие, приводящее его к блочно-диагональной форме:

$$WPW^* = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 & x_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_m, 0_s\right\}.$$

Откуда следует, что

$$P = W^* \operatorname{diag}\{0_{2k}, I_m, 0_s\} W +$$
$$+ W^* \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 & x_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_{m+s}\right\} W \text{ —}$$

сумма ортопроектора α и косого проектора β. Используя пункт f) теоремы 2, можно легко доказать, что β является строго косым проектором. Таким образом, теорема Дьековича позволяет дать простое представление строго косого проектора. И из нее также следует разложение (8).

В теореме 2 исследуются свойства строго косых проекторов.

Теорема 2. *Свойства косого проектора.*

Пусть $S = P(A, B)$ строго косой проектор. Тогда выполняются свойства a)–d):

a) rank $S \le n/2$, где n порядок матрицы S;

b) если A столбцовая матрица полного ранга, определяющая образ нашего проектора $S = P(A, B)$, то $\hat{B}A$ также столбцовая матрица полного ранга;

c) проектор S^* является строго косым;

d) проектор FSF^* является строго косым, если F унитарная матрица;

Кроме того, выполняются следующие свойства:

e) для любого проектора S выражение $S(S - S^+S)^+S$ есть его строго косая часть в разложении (8);

f) проектор S является строго косым тогда и только тогда, когда $S(S - S^+S)^+S = S$;

g) пусть A и B матрицы с одинаковым числом строк, причем подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ дополнительны. Тогда проектор $T = (\hat{B}A)^+$ строго косой.

Доказательство:

a) так как $\dim\{A\} = \dim\{B\}^\perp$, то в случае, если rank $P > n/2$, будет $\dim\{A\} + \dim\{B\}^\perp > n$, но в случае выполнения последнего неравенства $\{A\} \cap \{B\}^\perp \ne 0$;

b) в силу леммы матрица $\hat{B}A$ является столбцовой матрицей полного ранга тогда и только тогда, когда $\{A\} \cap \{B\}^\perp = 0$, но это условие и определяет, что проектор $P(A, B)$ строго косой;

c) по свойству (7)

$$\{S^*\} \cap (\ker S^*)^\perp = \{B\}^\perp \cap (\{A\}^\perp)^\perp = \{A\} \cap \{B\}^\perp = 0;$$

d) для произвольной матрицы m, воспользовавшись скелетным разложением этой матрицы и формулами (1) — (3), можно показать, что $(fmg)^+ = g^*m^+f^*$ для произвольных унитарных матриц f и g.

Если S строго косой проектор, то выполняется свойство f) данной теоремы: $S(S - S^+S)^+S = S$. Если выполнить подобие с унитарной матрицей F обеих частей последнего равенства, то получаем, используя вышеупомянутое свойство псевдообратной матрицы, что выполняется $T(T - T^+T)^+T = T$, где $T = FSF^*$, т. е. по свойству f) проектор T строго косой;

e) рассмотрим для произвольного ненулевого проектора $S = P(A, B)$ его разложение (8) на сумму ортопроектора $s = P(C)$ и строго косого проектора $t = P(D, B + C)$; выбираем в подпространствах C, D ортонормированные базисы, обозначаем матрицы, составленные из векторов этих базисов Y, X, соответственно; аналогично выбираем в подпространстве $(B + C)^\perp$ матрицу, составленную из векторов ортонормированного базиса — Z; проекторы s и t будут иметь вид (см. [1])

$$s = P(Y) = YY^*,\ t = P(X, \{Z\}^\perp) = X(Z^*X)^{-1}Z^*.$$

По свойству (4) $st = ts$, поэтому

$$Y^*X = 0,\ Y^*Z = 0, \qquad (9)$$

и

$$S = YY^* + X(Z^*X)^{-1}Z^*. \qquad (10)$$

Столбцы матриц X, Y, Z ортонормированы, так что выполняются равенства

$$X^*X = I,\ Y^*Y = I,\ Z^*Z = I,\ X^+ = X^*,\ Y^+ = Y^*,\ Z^+ = Z^*. \quad (11)$$

Выражение S^+S есть ортопроектор на образ матрицы S^*. В силу свойства (7) выполняется равенство $S^* = P(B^\perp, A^\perp)$. Из того, что $B \perp C$ и $\{Z\} \perp B + C$, следует, что $B^\perp = \{Z\} \oplus C$. Таким образом, из свойства (5) получаем равенство:

$$S^+S = Y^*Y + Z^*Z.$$

Подставим разложение (10) в выражение $S(S - S^+S)^+S = S$. Для этого обозначаем $U = Z^*X$ и последовательно получаем:

$$S - S^+S = (YY^* + XU^{-1}Z^*) - (YY^* + ZZ^*) =$$
$$= XU^{-1}Z^* - ZUU^{-1}Z^* =$$
$$= (X - ZZ^*X)U^{-1}Z^* = \tilde{Z}X \cdot U^{-1}Z^*.$$

Поскольку t — строго косой проектор, то в силу леммы матрица $\tilde{Z}X$ — столбцовая полного ранга. Матрица U^{-1} — невырожденная, поэтому $U^{-1}Z^*$ — строчная матрица полного ранга. Применив свойства (3), (1), (2), (11), получаем:

$$(S - S^+S)^+ = (U^{-1}Z^*)^+ \cdot (\tilde{Z}X)^+ =$$
$$= ZU \cdot (X^*\tilde{Z}X)^{-1}X^*\tilde{Z} = \hat{Z}X(X^*\tilde{Z}X)^{-1}X^*\tilde{Z}.$$

Учитывая свойство (9), получаем:

$$S(S - S^+S)^+S =$$
$$= (\hat{Y} + XU^{-1}Z^*)\hat{Z}X(X^*\tilde{Z}X)^{-1}X^*\tilde{Z}(\hat{Y} + XU^{-1}Z^*) =$$
$$= XU^{-1}Z^* \cdot \hat{Z}X(X^*\tilde{Z}X)^{-1}X^*\tilde{Z} \cdot XU^{-1}Z^* =$$
$$= XU^{-1}Z^* = t.$$

Таким образом, строго косая часть t любого проектора S определяется выражением $t = S(S - S^+S)^+S$, поэтому $s = S - S(S - S^+S)^+S$. Удивительным образом последнее «несимметричное» выражение задает эрмитову матрицу.

f) В работе [1] получен критерий того, что подпространства $\{A\}$ и $\{B\}$ имеют только нулевое пересечение: выполнение равенства $B(\tilde{A}B)^+B = B$.

Проектор S будет строго косым, если подпространства $\{S\}$ и $(\ker S)^\perp$ пересекаются по нулю. В качестве матриц A и B здесь можно брать любые, имеющие в качестве образов эти подпространства. Например, подстановка в равенство $B(\tilde{A}B)^+B = B$ пары матриц $A = S^*$ и $B = S$ дает такой критерий того, что проектор S является строго косым: $S(S - S^+S)^+S = S$. При получении последней формулы учитывается, что $P(\{S^*\}) = S^+S$:

$$\tilde{A}B = (I - P(\{S^*\}))S = (I - S^+S)S = S - S^+S.$$

Выбор пар (A, B):(S, S^*), (SS^+, S^+S), (S^+S, SS^+) дает, соответственно, следующие равенства для этого критерия:

$$S(S - S^+S)^+S = S,\ S(S^+S - S^+)^+S = SS^+,\\ S^+(SS^+ - S^+)^+S = S^+S. \quad (12)$$

Выполняя вычисления матричных выражений (12) аналогично тому, как это сделано для $S(S - S^+S)^+S = S$ в доказательстве пункта е), получаем выражения для проекторов из этого пункта:

$$t = S(S - S^+S)^+S = S(S - SS^+)^+S,$$
$$\hat{X} = S(S^+S - S^+)^+S^+,\ \hat{Z} = S^+(SS^+ - S^+)^+S.$$

При этом учитываем, что $S^+ = \tilde{B}\hat{A}$, $\hat{A} = \hat{X} + \hat{Y}$ и $\tilde{B} = \hat{Z} + \hat{Y}$.

(О том, что выполнено $S = (\tilde{B}\hat{A})^+$, см. в [1].);

g) пусть $T = (\hat{B}\hat{A})^+$ — некоторый проектор.

Сделаем замену: $\tilde{D} = \hat{B}$. Обозначим $C = (\{A\}^\perp + \{B\}) \cap \{A\}$. Тогда, так как $\{D\} = \{B\}^\perp$ по теореме 4 из работы [1] (формула (42)), имеем

$$T = (\hat{B}\hat{A})^+ = (\tilde{D}\hat{A})^+ = P(C, \{D\} + (\{A\} + \{D\})^\perp) =$$
$$= P(C, \{B\}^\perp + (\{A\}^\perp \cap \{B\})),$$

Получаем

$$\{T\} \cap (\ker T)^\perp = C \cap (\{B\}^\perp + (\{A\}^\perp \cap \{B\}))^\perp =$$
$$= C \cap (\{B\} \cap (\{A\}^\perp \cap \{B\})^\perp) =$$
$$= (C \cap \{B\}) \cap (\{A\}^\perp \cap \{B\})^\perp) = 0,$$

поскольку $C \subset \{A\}$ и $\{A\} \cap \{B\} = 0$.

Таким образом, для любого проектора $P(A,B) = (\tilde{B}\hat{A})^+$ проектор $(\hat{B}\hat{A})^+$ — строго косой.

Обсуждение результатов

Разложение проектора на сумму ортопроектора и строго косого проектора естественно возникает при многих появлениях проектора, например, в канонической форме Дьековича.

Применим разложение (8) к проектированию на плоскость в трехмерном пространстве. Пусть нормированные векторы n и b задают, соответственно, нормаль к плоскости, на которую выполняется проектирование и направление вдоль которого проводится проектирование. Тогда для проектора $P(\{n\}^\perp, \{b\})$ можно получить разложение (8) в виде

$$P(\{n\}^\perp, \{b\}) = cc^T + (n \times c)\,(b \times c)^T / \cos\alpha, \quad (13)$$

где $c = (n \times b) / \sin\alpha$, $\cos\alpha = n \times b$, $|n| = |b| = |c| = 1$.

Слагаемое cc^T в (13) это ортопроектор, а второе слагаемое — строго косой проектор. Пользуясь (13) для получения проекции вектора, необходимо вычислить два скалярных произведения и линейную комбинацию векторов c и $n \times c$. Формулу (13) можно использовать в системах машинной графики для вычисления косоугольных проекций на плоскость [22].

Выводы

Показано, что каждый проектор есть сумма двух проекторов: ортпроектора и строго косого проектора. Это разложение применяется к практической задаче косоугольного проектирования на плоскость.

Изучены свойства строго косых проекторов. Установлено, что строго косую часть каждого проектора S можно вычислить по формуле $S(S - S^+S)^+S$.

В настоящей работе систематически используется формула (4):

$$P(A + B, C) = P(A, B + C) + P(B, A + C),$$

которая, хоть и не является новым фактом линейной алгебры, но представляет другой угол зрения и часто находит применение.

Список литературы

[1] Ветошкин А.М., Шум А.А. Матричные выражения, задающие косой проектор // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2019. Т. 23. № 3. С. 107–113.
[2] Ветошкин А.М. Произведение проекторов. Случай вложенных подпространств // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2018. Т. 25. № 3. С. 235–236.
[3] Воеводин В.В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 544 с.
[4] Dokovic D.Z. Unitary similarity of projectors// Aequationes Math., 1991, v. 42, pp. 220–224.
[5] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.
[6] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991. 400 с.
[7] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra // The Mathematical Gazette, SIAM, 2000, v. 85, iss. 502, 718 p.
[8] Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, v. 51, pp. 406–413.
[9] Cline R. E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix // J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, pp. 588–600.
[10] Ветошкин А.М. Компактная форма формулы Клайна // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2014. Т. 21. Вып. 4. С. 337–338.
[11] Ветошкин А.М. Следствия из формулы Клайна // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2015. Т. 22. Вып. 4. С. 446–447.
[12] Lütkepohl H. Handbook of matrices. N.Y.:Wiley, 1996, 304 p.
[13] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Princeton University Press, 2009, 1101 p.
[14] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Pub., 1979, 272 p.
[15] Cvetković Ilić D. S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Singapore: Springer, 2017, 194 p.
[16] Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. N.Y.: Springer, 2011, 234 p.

[17] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. N.Y.&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.
[18] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.
[19] Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
[20] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986. 229 с.
[21] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2008. 496 с.
[22] Foley J.D., Van Dam A. Fundamentals of interactive computer graphics. Boston: Addison-Wesley, 1982, 664 p.

Сведения об авторах

Ветошкин Александр Михайлович — канд. техн. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), vetkin@mgul.ac.ru

Шум Александр Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета, shum@tstu.tver.ru

Поступила в редакцию 16.05.2020.
Принята к публикации 14.06.2020.

STRICTLY OBLIQUE PROJECTORS AND THEIR PROPERTIES

A.M. Vetoshkin[1], A.A. Shum[2]

[1]BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia
[2]Tver’ State Technical University named after Afanasiy Nikitin, 22, 170026, Tver’, Russia

vetkin@mgul.ac.ru

In this paper, strictly oblique projectors are defined as projectors that cannot be represented as the sum of two projectors, one of which is a nonzero orthoprojector. A theorem is proved that each projector can be represented in a unique way as the sum of a strictly oblique projector and an orthoprojector. The properties of such projectors are given. For example: if the projector is strictly oblique, then its Hermitian adjoint is also strictly oblique; the rank of a strictly oblique projector is at most $n/2$, where n is the order of the projector matrix; the property of the projector to be strictly oblique is preserved with a unitary similarity. The work is a continuation of the previous work of the authors, the main result of which is such a matrix expression for an arbitrary projector: $P(A,\tilde{B}) = A(A^*\tilde{B}A)^{-1}A^*\tilde{B}$ where A and B are two matrices of full rank whose columns define range and the null space of this projector. Based on this result, the article shows that the strictly oblique part of any projector P is given by the expression: $P(P - P^+P)^+P$. And equality $P = P(P - P^+P)^+P$ is a criterion that the projector P is a strictly oblique projector. The decomposition of the projector obtained in the work is applied to the practical problem of oblique projection onto the plane
Keywords: projector, orthoprojector, oblique projector, strictly oblique projector, generalized inverse matrix

Suggested citation: Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Strogo kosye proektory i ikh svoystva* [Strictly oblique projectors and their properties]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2020, vol. 24, no. 5, pp. 122–127.
DOI: 10.18698/2542-1468-2020-5-122-127

References

[1] Vetoshkin A.M., Shum A.A. *Matrichnye vyrazheniya, zadayushchie kosoy proektor* [Matrix expressions defining the oblique projector]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 107–113.
[2] Vetoshkin A.M. *Frobeniusovy jendomorfizmy mnozhestva proektorov* [Frobenius endomorphisms of set of projectors]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2012, no. 6(89), pp. 116–122.
[3] Voevodin V.V. *Entsiklopediya lineynoy algebry. Elektronnaya sistema LINEAL* [Encyclopedia of linear algebra. Electronic system LINEAL]. Saint Petersburg: BHV-Peterburg, 2006, 544 p.
[4] Dokovic D.Z. Unitary similarity of projectors. Aequationes Math., 1991, v. 42, pp. 220–224.
[5] Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverses. Theory and Applications. Springer, 2003, 420 p.
[6] Malyshev A.N. *Vvedenie v vychislitel’nuyu lineynuyu algebru* [Introduction to Computational Linear Algebra]. Novosibirsk: Nauka, 1991, 400 p.
[7] Meyer C.D. Matrix analysis and applied linear algebra. The Mathematical Gazette, SIAM, 2000, v. 85, iss. 502, 718 p.
[8] Penrose R. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, v. 51, pp. 406–413.
[9] Cline R. E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1964, v. 12, no. 3, pp. 588–600.
[10] Vetoshkin A.M. *Kompaktnaya forma formuly Klayna* [Compact form of the Cline formula]. Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review App. and Industrial Math.], 2014, t. 21, v. 4, pp. 337–338.
[11] Vetoshkin A.M. *Sledstviya iz formuly Klayna* [Consequences from Clin’s formula] Obozrenie prikl. i promyshl. matem. [Review app. and industrial Math.], 2015, t. 22, v. 4, pp. 446–447.
[12] Lütkepohl H. Handbook of matrices. N.Y.: Wiley, 1996, 304 p.

[13] Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton: Princeton University Press, 2009, 1101 p.
[14] Campbell S.L., Meyer C.D. Generalized inverses of linear transformations. London: Pitman Publ., 1979, 272 p.
[15] Cvetković Ilić D. S., Yimin Wei. Algebraic Properties of Generalized Inverses. Singapore: Springer, 2017, 194 p.
[16] Yanai H., Takeuchi K., Takane Y. Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition. N.Y.: Springer, 2011, 234 p.
[17] Albert A. Regression and the Moor-Penrose pseudoinverse. N.Y.&London: Academic Press, 1972, v. 94, 224 p.
[18] Barnet S. Matrices: methods and applications. Oxford: Clarendon Press, 1996, 466 p.
[19] Magnus J.R., Neudecker H. *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike* [Matrix differential calculus. With applications in statistics and econometrics]. Moscow: Fizmatlit, 2002, 496 p.
[20] Postnikov M.M. *Lektsii po geometrii. Semestr II. Lineynaya algebra* [Lectures on geometry. Semester II. Linear algebra]. Moscow: Nauka, 1986, 229 p.
[21] Beklemishev D.V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebry* [Additional chapters of linear algebra]. Saint Petersburg: Lan', 2008, 496 p.
[22] Foley J.D., Van Dam A. Fundamentals of interactive computer graphics. Boston: Addison-Wesley, 1982, 664 p.

Authors' information

Vetoshkin Aleksandr Mikhaylovich — Cand. Sci. (Tech), Associate Professor of BMSTU (Mytishchi branch), vetkin@mgul.ac.ru

Shum Aleksandr Anatol'evich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of TvSTU, shum@tstu.tver.ru

Received 16.05.2020.
Accepted for publication 14.06.2020.