ISSN 2542-1468, Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2020. Т. 24. № 1. С. 117–123. © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

УДК 519.715 DOI: 10.18698/2542-1468-2020-1-117-123

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

М.П. Туманов[1], П.С. Серебренников[2], С.Р. Абдуллин[2]

[1]МИЭМ НИУ ВШЭ, 123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, д. 1

miketum@mail.ru

Исследованы нелинейные колебательные процессы, возникающие в системах с переменными параметрами с учетом запаздывания. В рассматриваемых системах происходит переключение параметров в зависимости от некоторых условий работы, при этом при каждом значении параметров система остается линейной, но в целом, конечно, она нелинейная и имеет запаздывание. Эффективные методы практического исследования таких систем недостаточно изучены, чтобы полноценно использоваться в практике автоматического управления. Рассмотрены вопросы возникновения автоколебаний, устойчивость и параметры которых должны быть рассчитаны. На базе решения типовой задачи о переключаемых осцилляторах показана эффективность аналитического вычисления параметров автоколебаний в случаях, когда обычные методы исследования затруднены. Результаты вычислений подтверждены моделированием в среде Matlab.

Ключевые слова: нелинейные колебания, предельный цикл, устойчивость, запаздывание, переменная структура

Ссылка для цитирования: Туманов М.П., Серебренников П.С., Абдуллин С.Р. Исследование колебания в системах управления с переменной структурой с учетом запаздывания // Лесной вестник / Forestry Bulletin, 2020. Т. 24. № 1. С. 117–123. DOI: 10.18698/2542-1468-2020-1-117-123

Системы с переменной структурой (СПС) давно и эффективно используются в практике автоматического управления [1–3]. Это обусловлено следующими их полезными свойствами [4]:

– возможностью в разы увеличить быстродействие регулятора за счет скользящего режима;

– робастностью всей системы по отношению к изменению параметров объекта управления (движение в скользящем режиме не зависит от параметров объекта);

– возможностью получения бесконечного порядка астатизма (с ограничениями), что вообще невозможно в линейных системах;

– решение некоторых «проклятых» задач типа многократного дифференцирования в условиях шума и др.

Кроме случая, когда переключение структуры вводится специально, наличие негладкой нелинейности и запаздывания в правой части системы дифференциальных уравнений приводит к появлению предельных циклов, параметры которых необходимо рассчитывать аналитически.

Особо необходимо отметить, что и в современных цифровых системах автоматического управления (САУ) автоколебательные режимы могут появляться вследствие наличия нелинейности и запаздывания.

Цель работы

Целью работы является анализ работы СПС при наличии нелинейности и запаздывания. Рассмотрены условия появления и исчезновения предельных циклов, вычислены параметры этих циклов.

Постановка задачи. Средства и методы

Для решения системы с переменной структурой воспользуемся методом гармонической линеаризации [2, 5–7] и методикой имитационного моделирования в среде Matlab-Simulink.

Пусть имеется разбиение $X_k = \bigcup X_k$ всего фазового пространства в объединение областей. В этих областях определены функции f_k в совокупности образующие правую часть системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим модельный пример переключаемого осциллятора (рис. 1).

В квадрантах 1 и 3 задан осциллятор

$$\ddot{x} = -d\dot{x} - 4x.$$

В квадрантах 2 и 4 задан осциллятор

$$\ddot{x} = -d\dot{x} - x.$$

В обоих случаях осциллятор неустойчив. Можно это трактовать так, что имеется два переключаемых между собой осциллятора.

Осцилляторы будут переключаться при условии $(x \geq c \text{ и } \dot{x} \geq c)$ или $(x \leq -c \text{ и } \dot{x} \leq -c)$, то есть области переключения будут иметь вид, представленный на рис. 2. На границах областей фазовые траектории сшиваются, то есть графики переходят из области в область непрерывно. На рис. 2 обозначена область I, где действует уравнение 1-го осциллятора. На всей остальной плоскости — 2-го осциллятора.

Это характерно для систем оптимального управления, специально спроектированных генераторов с переключаемой структурой и в других случаях наличия сложных нелинейных колебательных систем [1, 2, 5, 8].

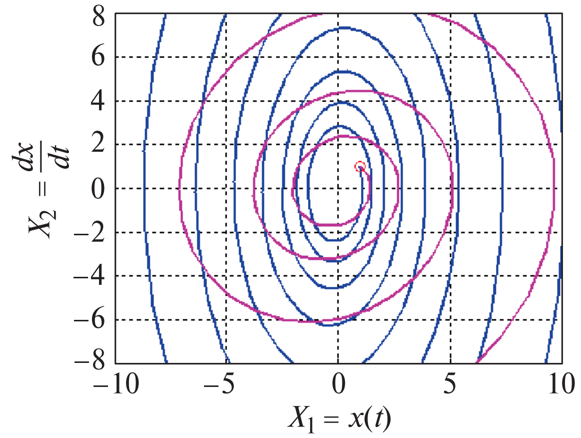

Рис. 1. Фазовая плоскость двух осцилляторов
Fig. 1. Phase plane of two oscillators

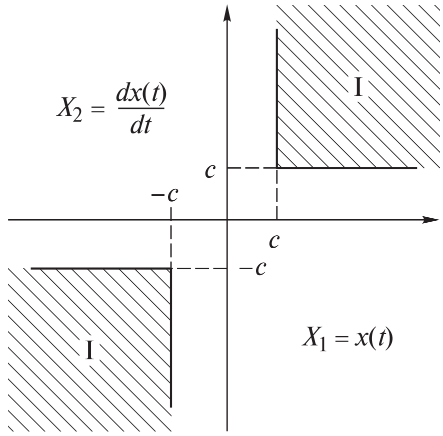

Рис. 2. Области переключения
Fig. 2. Switching areas

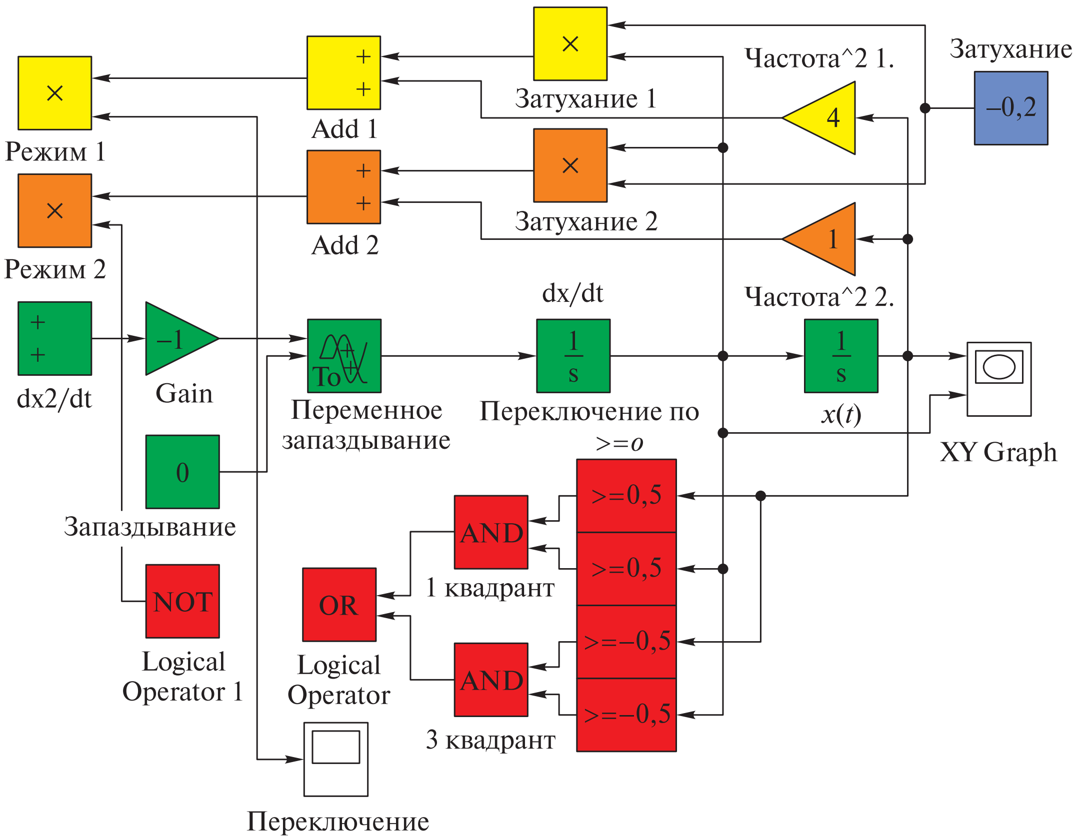

Рис. 3. Моделирование в среде Simulink
Fig. 3. Simulation in the Simulink environment

Прямое моделирование проводилось в среде Matlab-Simulink (рис. 3). Выявлена следующая особенность: даже при неустойчивых исходных осцилляторах, т. е. при $d < 0$, возможно устойчивое движение в целом при любом начальном условии (см. рис. 2), выбрано $d = -0{,}2$.

Следующие особенности поведения этой нелинейной системы:

1. Имеется устойчивый предельный цикл — автоколебания при любых начальных значениях и начальном значении $d = -0{,}2$. Рис. 4, *а* показывает переключение осцилляторов, а рис. 4, *б* — наличие предельного цикла.

2. При увеличении степени неустойчивости осцилляторов (при большем по модулю d) вся система становится неустойчивой.

3. При появлении запаздывания предельный цикл сохраняется до некоторого максимального значения запаздывания. На рис. 5, *а*, *б* запаздывание еще мало. На рис. 5, *в* имеет место случай

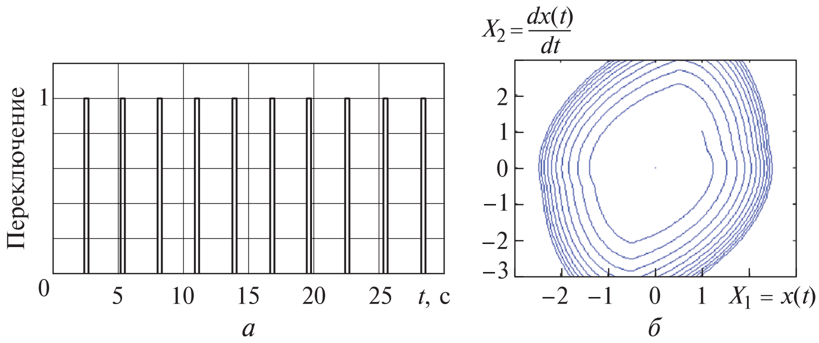

Рис. 4. Переключение структуры и потеря устойчивости при превышении неустойчивости осцилляторов $d < -0{,}6$

Fig. 4. Switching of the structure and loss of stability when exceeding the instability of the oscillators $d < -0{,}6$

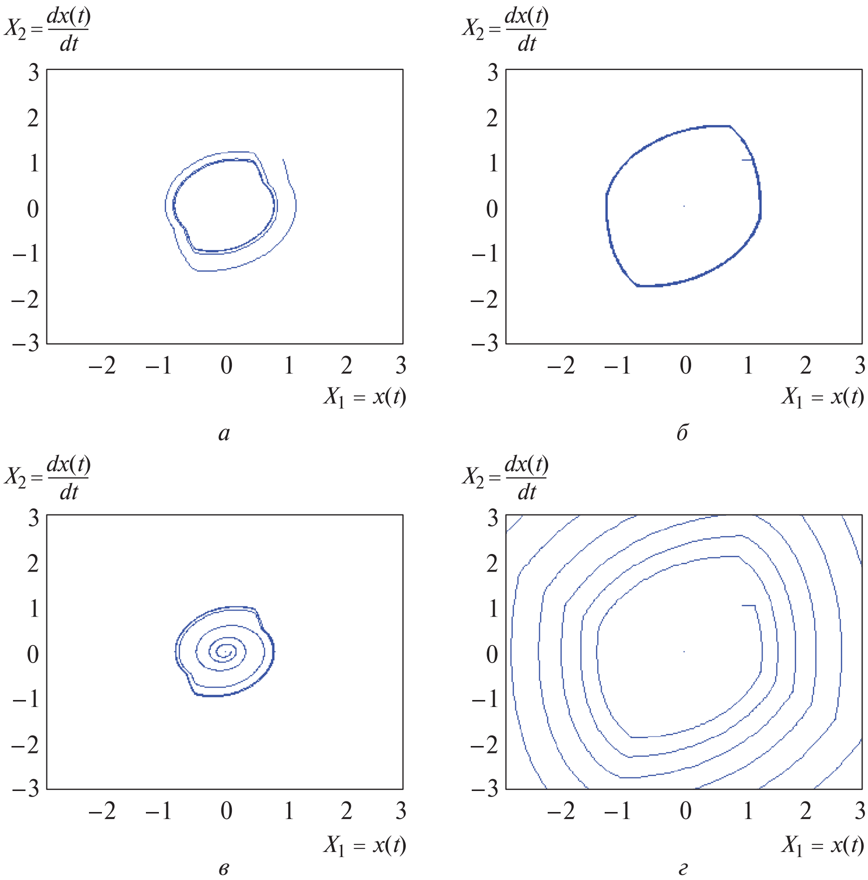

Рис. 5. Эволюция предельного цикла при возрастании запаздывания. Устойчивость теряется при времени запаздывания $\tau \approx 0{,}159$

Fig. 5. Evolution of the limit cycle with increasing delay. Stability is lost when the delay time $\tau \approx 0{,}159$

граничного запаздывания. При дальнейшем увеличении запаздывания, рис. 5, *г* система теряет устойчивость.

Как рассчитать все эти эффекты, а именно: вычислить граничное условие на d и параметры цикла — частоту (период) и амплитуду и граничное затухание? Сделать это можно с учетом особенностей рассмотренной задачи:

– система нелинейная, негладкая и не содержит малого параметра [9].

– наличие запаздывания усложняет не только моделирование, но и расчет [1, 10–13].

Имеющиеся условия позволяют применить метод гармонической линеаризации [2, 3, 5, 6, 14], что обосновано представлением замкнутой системы как последовательного соединения линейной части (практически любой сложности и порядка) и нелинейной функции, заданной в фазовом пространстве. Сложное негармоническое (но периодическое!) колебание на выходе нелинейного элемента, проходя линейную часть, лишается высших гармоник за счет спада амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в ВЧ области. В нашем случае линейная часть — это просто двойной интегратор с запаздыванием и с наклоном логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАЧХ) –40 дб/декаду, что соответствует второму порядку дифференциального уравнения.

Коэффициенты гармонической линеаризации [2, 3, 5, 6,14–21] имеют вид:

$$q(A,\omega)=1+\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{c}{A\omega}-\arcsin\frac{c}{A}\right),\quad (1)$$

$$r(A,\omega)=\frac{p}{\omega}\left(d\omega+\frac{3}{\pi}\left(1-\frac{c^2}{A^2}\left(1+\omega^2\right)\right)\right).\quad (2)$$

Эти формулы получены путем объемных вычислений, которые здесь опущены в целях экономии места. Коэффициенты (1, 2) зависят не только от d и ω, но от A, что дает возможность учета нелинейности, вычислений параметров предельного цикла и границ устойчивости. Теперь можно записать условие нахождения на границе устойчивости, так как при этом возможны периодические решения (граница Найквиста)

$$W(j\omega)\exp(-j\tau\omega)(q(A,\omega,d)+jr(A,\omega,d))=-1.\quad (3)$$

Это условие есть комплексное уравнение, которое необходимо решить относительно A и ω — амплитуды и частоты автоколебаний, то есть, параметров предельного цикла.

Для нахождения решения построим поверхность модуля этой комплексной функции, обращающейся в 0 (рис. 6).

Решение уравнения (3) — самая низкая точка графика. Переход к полулогарифмическим координатам на рис. 7 значительно упрощает нахождение решения, так как оно становится отчетливее выражено: отрицательный минимум при этом может достигать –100 дб. Оно легко находится в полулогарифмических координатах (см. рис. 7) и равно: ω ≈ 1,23; A ≈ 0,9, что соответствует данным моделирования.

Решение уравнения производим численным методом (последовательных приближений). Итерации метода сходятся к точке ω ≈ 1,233; A ≈ 0,92. Имеется и еще один корень, который также хорошо виден на графиках и находится численно: ω ≈ 0,78; A ≈ 0,69.

Однако с такими параметрами предельный цикл невозможен, так как не происходит переключения осцилляторов и система неустойчива. Это отражает тот факт, что условие (3) является лишь необходимым для существования периодических колебаний.

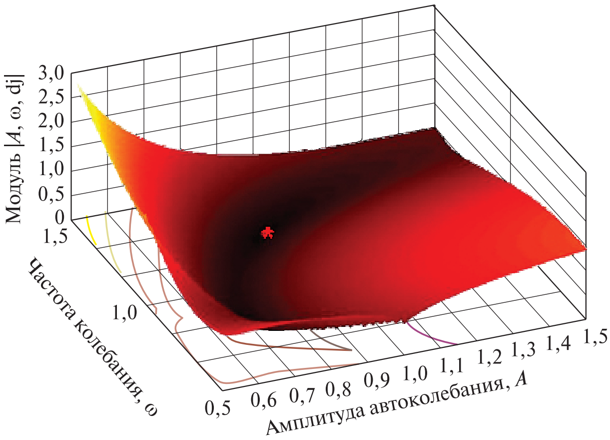

Рис. 6. Поверхность модуля (3), d = –0,2, c = 0,5; красная точка — решение

Fig. 6. The surface of module (3) in example 2, d = –0,2, c = 0,5; the red dot is the solution

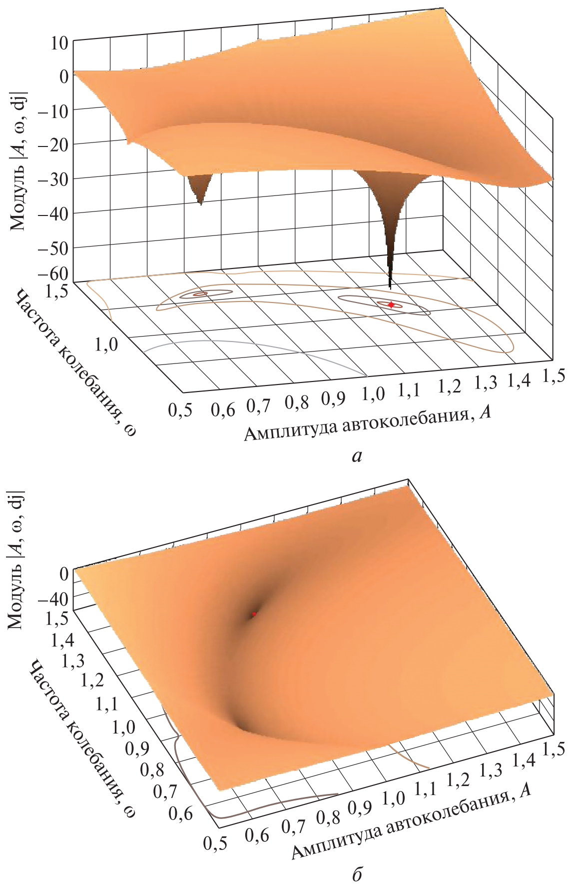

Рис. 7. Поверхность модуля (3) в полулогарифмических координатах: *а*, *б* — повороты рис. под разными углами

Fig. 7. The surface of the module (3) in semi-logarithmic coordinates: *a*, *б* — turns of the fig. at different angles)

Теперь учтем запаздывание. Мнимая экспонента имеет единичный модуль, поэтому не участвует в уравнении для модуля, вытекающем из выражения (3). Но мы можем учесть запаздывание, построив график годографа амплитудно-фазочастотной характеристики (АФЧХ) на

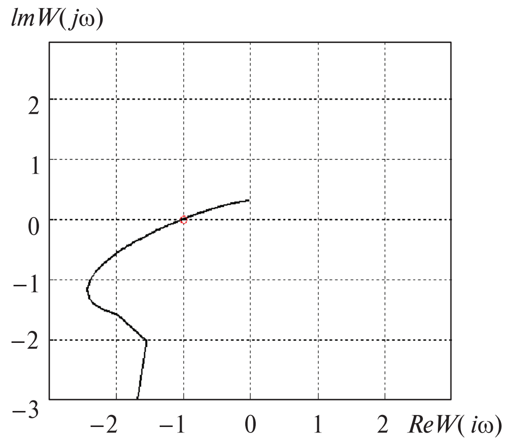

Рис. 8. АФЧХ без запаздывания выполнены условия автоколебаний — прохождение чере точку –1. Амплитуда колебаний $A \approx 0{,}92$, $\omega \approx 1{,}233$

Fig. 8. Frequency domain without lag, the conditions of self-oscillations are fulfilled — passing through the point –1. The oscillation amplitude is $A \approx 0{,}92$, $\omega \approx 1{,}233$

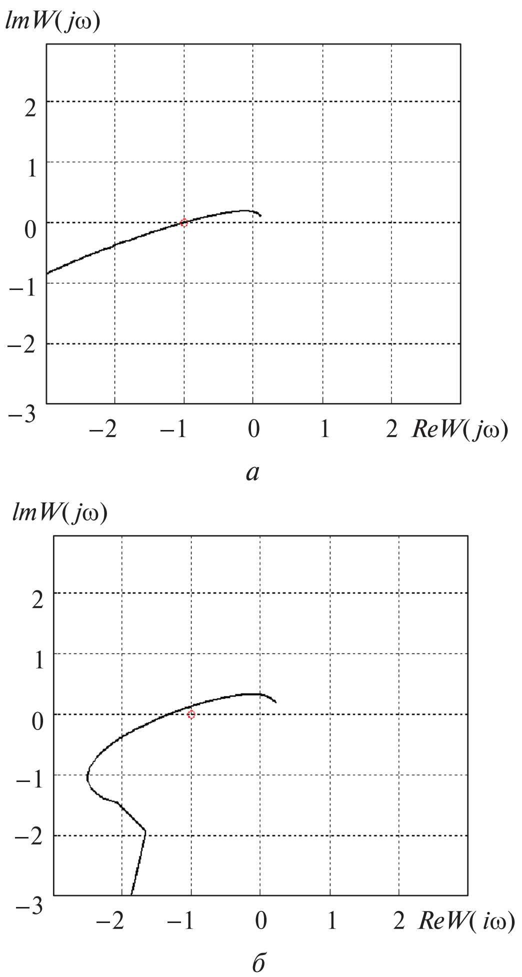

Рис. 9. Для запаздывания $\tau \approx 0{,}159$ — не выполнены условия автоколебаний, колебания с $A \approx 0{,}92$ невозможны (*а*), однако есть колебания с амплитудой $A \approx 2$ (*б*)

Fig. 9. For lagging $\tau \approx 0{,}159$ are not fuifilled conditions of self-oscillations, oscillations with $A \approx 0{,}92$ are not impossible (*a*), but there are oscillations with amplitude $A \approx 2$ (*б*)

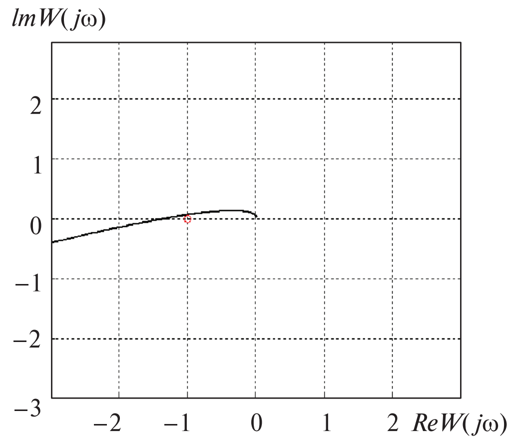

Рис. 10. Для запаздывания $\tau \approx 0{,}2$ и более, не выполнены условия автоколебаний ни при каких амплитудах; общая неустойчивость

Fig. 10. Lags are $\tau \approx 0{,}2$ and more, conditions of self-oscillations are not fuifilled at any amplitudes; general instability

комплексной плоскости (рис. 8–10) и изучив условия его прохождения через точку (–1, *j*0) — условие Найквиста, что прояснит, почему исчезает предельный цикл при запаздывании большем ~ 0,159.

Проанализируем условие условие прохождения годографа через точку (–1; *j*0) в зависимости от запаздывания и находить возможные амплитуды автоколебаний, если такие имеются (рис. 9, 10). Выясняется, что при запаздывании более ~0,159 таких амплитуд нет. Следовательно, предельный цикл разрушается, он невозможен, но возможен другой предельный цикл с амплитудой 2.

Наконец, при еще больших запаздываниях τ на рис. 10 показано, что автоколебания не возможны ни при каких амплитудах.

Выводы

Метод гармонической линеаризации совместно с компьютерным моделированием может быть эффективно использован для обнаружения колебаний негладких нелинейных систем с запаздыванием. Рассмотрен пример нелинейной системы с запаздыванием и проведен расчет характеристик этих колебаний. Получены параметры предельного цикла и границы устойчивости в зависимости от запаздывания.

Список литературы

[1] Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997. 352 с.

[2] Емельянов С.В., Уткин В.И. Об устойчивости движения одного класса САР с переменной структурой // Техническая кибернетика, № 2, 1964. С. 34–39

[3] Методы классической и современной теории автоматического управления // Методы современной теории автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. Т. 5. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 784 с.

[4] Уткинс Ю.Ф. О применении прямого метода Ляпунова к некоторым системам с переменной структурой // Теория и средства автоматики. М.: Наука, 1968. 23 с.
[5] Попов Е.П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 584 с.
[6] Пупков К.А., Егупов Н.Д., Лукашенко Ю.Л. Матричные методы расчета и проектирования сложных систем автоматического управления для инженеров / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 664 с.
[7] Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
[8] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
[9] Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. 336 с.
[10] Park P.A. Delay-dependent stability for systems uncertain time – invariant delays // IEEE Trans. on Automat. Control, 1999, v. 44, pp. 876–887.
[11] Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control // Automatica, 2008, v. 44, no 1, pp. 38–52.
[12] Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M. Verriest E.I .On delay dependent stability of neutral systems // Automatica, 2003, v. 39, no 2, pp. 255–261.
[13] Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control // Automatica, 2008, v. 44, no 1, pp. 38–52.
[14] Нелинейная оптимизация систем автоматического управления / под общ. ред. Е.П. Попова. М.: Машиностроение, 1970. 308 с.
[15] Нелинейные нестационарные системы / Под ред. Ю.И. Топчеева. М.: Машиностроение, 1986. 334 с.
[16] Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 440 с.
[17] Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: МГУ, 1971. 508 с.
[18] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1964. 224 с.
[19] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
[20] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 273 с.
[21] Цыкунов А.М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика, 2007. № 7. С. 103–115.

Сведения об авторах

Туманов Михаил Петрович — канд. техн. наук, доцент, профессор Департамента электронной инженерии МИЭМ НИУ ВШЭ, miketum@mail.ru

Серебренников Павел Семенович — канд. физ.-мат. наук, доцент МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), serebrennikov@mgul.ac.ru

Абдуллин Салават Роальдович — ст. преподаватель МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал), mai-sal@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.10.2019.
Принята к публикации 17.12.2019.

THE STUDY OF OSCILLATIONS IN CONTROL SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE WITH LAGGING

M.P. Tumanov[1], P.S. Serebrennikov[2], S.R. Abdullin[2]

[1]MIEM HSE, 34 Tallinskaya Ulitsa, 123458, Moscow, Russia
[2]BMSTU (Mytishchi branch), 1, 1st Institutskaya st., 141005, Mytishchi, Moscow reg., Russia

miketum@mail.ru

The article explores nonlinear oscillatory processes that occur in systems with variable parameters with delay. In practice, there are often systems in which the parameters are switched depending on certain operating conditions, while for each value of the parameters the system remains linear, but in general, of course, it is non-linear and has a delay. Effective methods of practical research of such systems have not been sufficiently studied to be fully used in the practice of automatic control. The presence of lag further complicates the task. Typical for such systems is the occurrence of self-oscillations, the stability and parameters of which must be calculated. Also of interest is the question of the existence of limit cycles and their disappearance. The article on the basis of solving a typical problem shows the effectiveness of the analytical calculation of the self-oscillation parameters in cases where conventional research methods are difficult. The calculation results are confirmed by modeling in the Matlab environment. It is shown that the harmonic linearization method together with computer simulation can be effectively used to detect oscillations of nonsmooth nonlinear systems with delay. It is shown that the harmonic linearization method together with computer simulations can be effectively used to detect oscillations of nonsmooth nonlinear systems with delay. An example of a nonlinear system with delay is considered, and the characteristics of these oscillations are calculated. The accuracy of the method is estimated. The parameters of the limit cycle and stability limits are obtained depending on the delay. The results of calculations are presented in a visual graphic form.

Keywords: nonlinear oscillations, limit cycle, stability, delay, variable structure

Suggested citation: Tumanov M.P., Serebrennikov P.S., Abdullin S.R. *Issledovanie kolebaniya v sistemakh upravleniya s peremennoy strukturoy s uchetom zapazdyvaniya* [The study of oscillations in control systems with variable structure with lagging]. Lesnoy vestnik / Forestry Bulletin, 2020, vol. 24, no. 1, pp. 117–123. DOI: 10.18698/2542-1468-2020-1-117-123

References

[1] Emel'yanov S.V., Korovin S.K. *Novye tipy obratnoy svyazi. Upravlenie pri neopredelennosti* [New types of feedback. Management under uncertainty]. Moscow: Nauka, 1997, 352 p.

[2] Emel'yanov S.V., Utkin V.I. *Ob ustoychivosti dvizheniya odnogo klassa SAR s peremennoy strukturoy* [On the stability of motion of one class of ATS with variable structure] Tekhnicheskaya kibernetika [Technical Cybernetics], 1964, no. 2, pp. 34–39

[3] *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of the classical and modern theory of automatic control]. Metody sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya [Methods of the modern theory of automatic control]. Ed. K.A. Pupkov, N.D. Egupov. T. 5. Moscow: Publishing house of MSTU. N.E. Bauman, 2004, 784 p.

[4] Utkins Yu.F. *O primenenii pryamogo metoda Lyapunova k nekotorym sistemam s peremennoy strukturoy* [On the application of the direct Lyapunov method to some systems with variable structure] Teoriya i sredstva avtomatiki [Theory and Automation Tools]. Moscow: Nauka, 1968, 23 p.

[5] Popov E.P. *Prikladnaya teoriya protsessov upravleniya v nelineynykh sistemakh* [Applied theory of control processes in nonlinear systems]. Moscow: Nauka, 1973, 584 p.

[6] Pupkov K.A., Egupov N.D., Lukashenko Yu.L. *Matrichnye metody rascheta i proektirovaniya slozhnykh sistem avtomaticheskogo upravleniya dlya inzhenerov* [Matrix methods of calculation and design of complex automatic control systems for engineers]. Ed. K.A. Pupkov, N.D. Egupov. Moscow: Publishing House of MSTU N.E. Bauman, 2007, 664 p.

[7] Pervozvanskiy A.A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* [The course of the theory of automatic control]. Moscow: Nauka, 1986, 616 p.

[8] Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem* [Stability and periodic modes of regulated systems with aftereffect]. Moscow: Nauka, 1981, 448 p.

[9] Solodovnikov V.V., Semenov V.V. *Spektral'naya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [The spectral theory of non-stationary control systems]. Moscow: Nauka, 1974, 336 p.

[10] Park P.A. Delay-dependent stability for systems uncertain time - invariant delays. IEEE Trans. on Automat. Control, 1999, v. 44, pp. 876–887.

[11] Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control. Automatica, 2008, v. 44, no 1, pp. 38-52.

[12] Ivanescu D., Niculescu S.I., Dugard L., Dion J.M. Verriest E.I.On delay dependent stability of neutral systems. Automatica, 2003, v. 39, no 2, pp. 255–261.

[13] Gao H., Chen T., Lam J. A new delay system approach to network based control. Automatica, 2008, v. 44, no 1, pp. 38-52.

[14] *Nelineynaya optimizatsiya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Nonlinear optimization of automatic control systems]. Ed. E.P. Popov. Moscow: Engineering, 1970, 308 p.

[15] *Nelineynye nestatsionarnye sistemy* [Nonlinear non-stationary systems]. Ed. Yu.I. Topcheev. Moscow: Engineering, 1986, 334 p.

[16] Solodovnikov V.V., Dmitriev A.N., Egupov N.D. *Spektral'nye metody rascheta i proektirovaniya sistem upravleniya* [Spectral methods of calculation and design of control systems]. Moscow: Engineering, 1986, 440 p.

[17] Volosov V.M., Morgunov B.I. *Metod osredneniya v teorii nelineynykh kolebatel'nykh sistem* [Averaging method in the theory of nonlinear oscillatory systems]. Moscow: Moscow State University, 1971, 508 p.

[18] Barbashin E.A. *Vvedenie v teoriyu ustoychivosti* [Introduction to sustainability theory]. Moscow: Nauka, 1964, 224 p.

[19] Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The general problem of traffic stability]. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 470 p.

[20] Polyak B.T., Shcherbakov P.S. *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka, 2002, 237 p.

[21] Tsykunov A.M. *Algoritmy robastnogo upravleniya s kompensatsiey ogranichennykh vozmushcheniy* [Robust control algorithms with compensation for bounded disturbances] Avtomatika i telemekhanika [Automation and Remote Control], 2007, no. 7, pp. 103–115.

Authors' information

Tumanov Mikhail Petrovich — Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor, Professor, MIEM HSE, miketum@mail.ru

Serebrennikov Pavel Semenovich — Cand. Sci. (Phis.-Math.), Associate Professor of the BMSTU (Mytishchi branch), serebrennikov@mgul.ac.ru

Abdullin Salavat Roal'dovich — Senior Lecturer of the BMSTU (Mytishchi branch), mai-sal@yandex.ru

Received 30.10.2019.

Accepted for publication 17.12.2019.